Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 11

Nachdem wir das Grenzwertverhalten von Folgen und Reihen für die beiden Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zur Verfügung haben, wenden wir uns in den nächsten Vorlesungen dem Grenzwertverhalten von Funktionen zu. Die einfachsten Funktionen (abgesehen von den linearen Funktionen, die in der linearen Algebra im Mittelpunkt stehen) sind die Polynomfunktionen.

Der Polynomring über einem Körper

Definition 11.1. Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

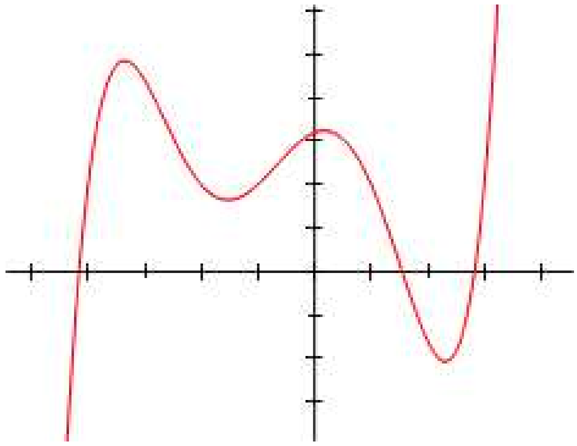
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

Ein Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ ist formal gesehen nichts anderes als das Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, die die *Koeffizienten* des Polynoms heißen. Der Körper K heißt in diesem Zusammenhang der *Grundkörper* des Polynomrings. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition liegt unmittelbar eine Gruppe vor, mit dem *Nullpolynom* (bei dem alle Koeffizienten null sind) als neutralem Element. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0.

Die für ein einfaches Tupel zunächst ungewöhnliche Schreibweise deutet in suggestiver Weise an, wie die Multiplikation aussehen soll, das Produkt $X^n \cdot X^m$ ist nämlich durch die Addition der Exponenten gegeben. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings. Für beliebige Polynome ergibt sich die Multiplikation aus dieser einfachen Multiplikationsbedingung durch distributive Fortsetzung gemäß der Vorschrift, „alles mit allem“ zu multiplizieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_jX^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_rb_{k-r}\,.$$



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

DEFINITION 11.2. Der *Grad* eines von 0 verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms. Der Ausdruck a_nX^n heißt *Leitterm*.

Division mit Rest

SATZ 11.3. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(T) = 0$ und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \cdots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P - TH \\ &= 0X^n + (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k} b_{k-1})X^{n-1} + \cdots \\ & \quad +(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k} b_0)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \cdots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P = P' + TH = TQ' + TH + R' = T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. □

Der Beweis des Satzes ist konstruktiv, d.h. es wird in ihm ein Verfahren beschrieben, mit der man die Division mit Rest berechnen kann. Dazu muss man die Rechenoperationen des Grundkörpers beherrschen. Wir geben dazu zwei Beispiele, eines über den rationalen Zahlen und eines über den komplexen Zahlen.

Beispiel 11.4. Wir führen die Polynomdivision

$$P = 6X^3 + X + 1 \text{ durch } T = 3X^2 + 2X - 4$$

durch. Es wir also ein Polynom vom Grad 3 durch ein Polynom vom Grad 2 dividiert, d.h. dass der Quotient und auch der Rest (maximal) vom Grad 1 sind. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar $2X$. Das Produkt ist

$$2X\left(3X^2 + 2X - 4\right) = 6X^3 + 4X^2 - 8X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$6X^3 + X + 1 - \left(6X^3 + 4X^2 - 8X\right) = -4X^2 + 9X + 1.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P', setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit $\frac{-4}{3}$ multiplizieren. Dies ergibt

$$-\frac{4}{3}T = -\frac{4}{3}\left(3X^2 + 2X - 4\right) = -4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$-4X^2 + 9X + 1 - \left(-4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}\right) = \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$6X^3 + X + 1 = \left(3X^2 + 2X - 4\right)\left(2X - \frac{4}{3}\right) + \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Beispiel 11.5. Wir führen die Polynomdivision

$$P = (4+3i)X^3 + X^2 + 5i \text{ durch } T = (1+i)X^2 + X - 3 + 2i$$

aus. Das Inverse zu $1+i$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und daher ist

$$\begin{aligned}(4+3i)(1+i)^{-1} &= (4+3i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2 + \frac{3}{2} - 2i + \frac{3}{2}i \\ &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Daher beginnt Q mit $\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)X$ und es ist

$$\begin{aligned}&((1+i)X^2 + X - 3 + 2i)\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)X \\ = \;& (4+3i)X^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)X^2 + \left(-\frac{19}{2} + \frac{17}{2}i\right)X.\end{aligned}$$

Dies muss man nun von P abziehen und erhält

$$\begin{aligned}&P - \left((4+3i)X^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)X^2 + \left(-\frac{19}{2} + \frac{17}{2}i\right)X\right) \\ = \;& \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)X^2 + \left(\frac{19}{2} - \frac{17}{2}i\right)X + 5i.\end{aligned}$$

Auf dieses Polynom (nennen wir es P') wird das gleiche Verfahren angewendet. Man berechnet

$$\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -1 + \frac{3}{2}i.$$

Daher ist der konstante Term von Q gleich $-1 + \frac{3}{2}i$ und es ergibt sich

$$((1+i)X^2 + X - 3 + 2i)\left(-1 + \frac{3}{2}i\right) = \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)X^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}i\right)X - \frac{13}{2}i.$$

Dies ziehen wir von P' ab und erhalten

$$P' - \left(\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)X^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}i\right)X - \frac{13}{2}i\right) = \left(\frac{21}{2} - 10i\right)X + \frac{23}{2}i.$$

Dies ist der Rest R, die vollständige Division mit Rest ist also

$$\begin{aligned}&(4+3i)X^3 + X^2 + 5i \\ = \;& ((1+i)X^2 + X - 3 + 2i)\left(\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right)X - 1 + \frac{3}{2}i\right) \\ &+ \left(\frac{21}{2} - 10i\right)X + \frac{23}{2}i.\end{aligned}$$

Nullstellen

Unter einer Nullstelle eines Polynoms P versteht man ein $a \in K$ mit $P(a) = 0$. Ein Polynom muss keine Nullstellen besitzen, ferner hängt dies vom Grundkörper ab. Das Polynom $X^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle, dagegen gibt es die komplexen Nullstellen i und $-i$. Als Element in $\mathbb{R}[X]$ kann man $X^2 + 1$ nicht als Produkt von einfacheren Polynomen schreiben, in $\mathbb{C}[X]$ hingegen hat man die Zerlegung $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Lemma 11.6. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R\,,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. □

Korollar 11.7. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 11.6 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

Satz 11.8. *Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n - 1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.*

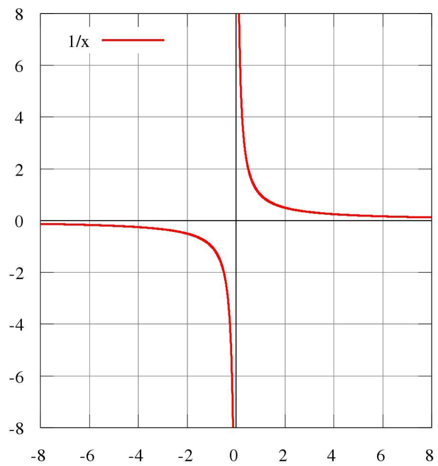
Beweis. Siehe Aufgabe 11.11. □

Rationale Funktionen

Die nach den Polynomfunktionen einfachsten Funktionen sind die rationalen Funktionen.

Definition 11.9. Zu zwei Polynomen $P, Q \in K[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion
$$D \longrightarrow K,\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$
wobei $D \subseteq K$ das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion.*

Für uns ist der Fall $K = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ wichtig.



Man kann Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graph der rationalen Funktion $1/X$.

Der Polynomring $K[X]$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Man kann aber mit Hilfe der rationalen Funktionen einen Körper konstruieren, der den Polynomring enthält, ähnlich wie man aus $\mathbb{Z}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren kann. Dazu definiert man
$$K(T) := \left\{ \frac{P}{Q} |\, P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\} ,$$
wobei man wieder zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ miteinander identifiziert, wenn $PQ' = P'Q$ ist. Auf diese Weise entsteht der *Körper der rationalen Funktionen* (über K).

Abbildungsverzeichnis