Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 89

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 89.1. Diskutiere die Newton-Leibniz-Formel als einen Spezialfall des Satzes von Stokes.

Aufgabe 89.2. Es sei
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls kompakten Träger hat, und dass $\int_{\mathbb{R}} f' d\lambda^1 = 0$ ist.

Aufgabe 89.3. Es sei
$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeige, dass die Ableitung f' ebenfalls kompakten Träger hat, und dass $\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f' d\lambda^1 = f(0)$ ist. Zeige, dass diese Aussage nicht gelten muss, wenn f nicht kompakten Träger besitzt.

Aufgabe 89.4. Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand und mit abzählbarer Topologie und es sei ω eine stetig differenzierbare geschlossene $(n-1)$-Differentialform auf M mit kompaktem Träger. Zeige
$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Aufgabe 89.5. Es sei M eine kompakte n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform auf M. Zeige
$$\int_M d\omega = 0.$$
Was bedeutet diese Aussage für S^1? Wie kann man diese Aussage in diesem Fall über ein Wegintegral beweisen?

Aufgabe 89.6. Es sei M eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei τ eine positive Volumenform auf M. Zeige, dass τ nicht exakt ist.

Wie sieht dies ohne die Kompaktheitsvoraussetzung aus?

Aufgabe 89.7. Es sei $M = B(0,1) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Rand $\partial M = S^1$. Wir betrachten die beiden stetig differenzierbaren 1-Differentialformen

$$\omega = ydx - xdy \text{ und } \tau = \frac{1}{x^2+y^2}(ydx - xdy)$$

auf M. Zeige, dass die Einschränkungen der beiden Formen auf den Rand übereinstimmen und insbesondere $\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \tau$ gilt. Vergleiche $\int_M d\omega$ und $\int_M d\tau$.

Aufgabe 89.8. Man mache sich klar, dass der Satz von Green nicht behauptet, dass der Flächeninhalt eines umrandeten Gebiets im $\mathbb{R}^2$ nur von der Länge des Randes abhängt.

Aufgabe 89.9. Es sei D das durch $(0,2)$, $(1,-1)$ und $(-2,-1)$ gegebene Dreieck und $\tau = x^2 y dx \wedge dy$ eine 2-Differentialform auf D. Finde eine Stammform für τ und berechne damit $\int_D \tau$ durch ein Integral über dem Dreiecksrand.

Aufgabe 89.10. Bestätige den Satz von Green für das Einheitsquadrat $T = [0,1] \times [0,1]$ und die Differentialformen

$$\omega = x^a y^b dx + x^c y^d dy$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ durch explizite Berechnungen.

Aufgabe 89.11. Bestätige den Satz von Green durch explizite Berechnungen für die Menge $T = [-2,2] \times [-2,2] \setminus U(0,1)$ (also das zentrierte Quadrat der Seitenlänge 4 ohne den offenen Einheitskreis) und die Differentialform $\omega = (x-y)dx + xydy$.

Aufgabe 89.12.*

Beweise den Satz von Green für ein Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ und für die Differentialform xdy.

Aufgabe 89.13. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Wir fassen den Subgraphen als eine Mannigfaltigkeit mit Rand auf, wobei der Rand aus dem Graphen, dem Grundintervall und den beiden Seitenkanten, aber ohne die vier Eckpunkte besteht. Berechne den Flächeninhalt des Subgraphen mit den beiden Differentialformen xdy und ydx über den Rand.

Aufgabe 89.14. Bestimme das Volumen der abgeschlossenen Einheitskugel durch ein geeignetes Flächenintegral über die Einheitssphäre S^2.

Aufgabe 89.15. Wir betrachten die 2-Differentialform

$$\omega = zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$$

auf der Einheitskugel $B(0,1)$.

a) Zeige, dass $d\omega$ das Dreifache der Standardvolumenform auf der Kugel ist.

b) Zeige, dass $\omega|_{S^2}$ die Standardflächenform auf der Einheitssphäre ist.

c) Berechne die Kugeloberfläche aus dem Kugelvolumen mit dem Satz von Stokes.

Aufgabe 89.16. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem nichtleeren Rand. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$M \longrightarrow \partial M$$

gibt.

Aufgabe 89.17. Es sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ ein Halbraum. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon H \longrightarrow \partial H$$

gibt, deren Einschränkung auf ∂H die Identität ist.

Wie sieht das bei $n = 0$ aus?

Aufgabe 89.18. Zeige, dass es auf einem Annulus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

Aufgabe 89.19. Es sei $V \subseteq H$ eine offene Menge im Halbraum $H \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass es eine offene Menge $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$\tilde{f}\colon \tilde{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $\tilde{V} \cap H = V$ und $\tilde{f}|_{\tilde{V}} = f$ gibt.

Aufgabe 89.20. Zeige, dass die im Beweis zum Brouwerschen Fixpunktsatz verwendete Abbildung

$$\varphi(x) = x + \left(- \langle x, h(x) \rangle + \sqrt{1 + \langle x, h(x) \rangle^2 - ||x||^2} \right) \cdot h(x)$$

(mit $h(x) = \frac{\psi(x)-x}{||\psi(x)-x||}$) die Einheitskugel auf die Einheitssphäre abbildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 89.21. (4 Punkte)

Es sei D das durch $(0,2)$, $(1,-1)$ und $(-2,-1)$ gegebene Dreieck und $\tau = (3x^2y^5 - x\sin y)dx \wedge dy$ eine 2-Differentialform auf D. Finde eine Stammform für τ und berechne damit $\int_D \tau$ durch ein Integral über dem Dreiecksrand.

Aufgabe 89.22. (6 Punkte)

Wir betrachten den Würfel

$$Q = [-1,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = dx \wedge dy + y dx \wedge dz + x^2y^2z^2 dy \wedge dz\,.$$

Berechne $d\omega$ und die beiden Integrale $\int_{\partial Q} \omega$ und $\int_Q d\omega$ (getrennt voneinander).

Aufgabe 89.23. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe über ein geeignetes Wegintegral.

Aufgabe 89.24. (2 Punkte)

Zeige, dass es auf einem Torus bijektive stetig differenzierbare Abbildungen ohne Fixpunkt gibt.

Aufgabe 89.25. (3 Punkte)

Es sei B die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und K der obere Kreishalbbogen. Zeige, dass es eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon B \longrightarrow K$$

gibt, deren Einschränkung auf K die Identität ist.

Aufgabe 89.26. (3 Punkte)

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\| v \| \leq 1$ und $\| w \| = 1$. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ mit $\| v + aw \| = 1$.