Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 86

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 86.1. Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = (x^2 - y^3)dx + x^3y^2dy$$

auf dem $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 86.2. Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = xy^2dx + yzdy + x^3dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 86.3.*

Berechne die äußere Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega = \frac{x^2}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

auf $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \neq 0\}$.

Aufgabe 86.4.*

Berechne die äußere Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega = e^{xz}dx \wedge dy - xyzdx \wedge dz + (\sin(\cos(xy)) + y^{10}z^{100})dy \wedge dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 86.5.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

die durch

$$f(t) = \frac{\sin^3(t^4)}{1+t^2}$$

a) Berechne die äußere Ableitung von f.

b) Berechne die äußere Ableitung von fdt.

Aufgabe 86.6. Bestimme die äußere Ableitung der 2-Differentialform

$$\omega = xdx \wedge dy + xy^2 zdy \wedge dz + xe^y dx \wedge dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 86.7. Zeige, dass die Differentialform

$$\omega = (2x - \sin y)dx - x \cos y\, dy$$

auf dem $\mathbb{R}^2$ geschlossen und auch exakt ist.

Aufgabe 86.8. Es sei ω eine differenzierbare Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit M und $\varphi\colon L \to M$ eine auf der Mannigfaltigkeit L definierte differenzierbare Abbildung.

a) Es sei ω geschlossen. Zeige, dass auch die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ geschlossen ist.

a) Es sei ω exakt. Zeige, dass auch die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ exakt ist.

Aufgabe 86.9. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf U mit dem gemäß Lemma 84.3 zugehörigen Vektorfeld F auf U. Zeige, dass ω genau dann geschlossen ist, wenn F die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

Aufgabe 86.10. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und ω eine stetig differenzierbare 1-Form auf U mit dem gemäß Lemma 84.3 zugehörigen Vektorfeld F auf U. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn F ein Gradientenfeld ist.

Aufgabe 86.11. Es sei M eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine differenzierbare 1-Form auf M. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn für jeden stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma\colon [a, b] \longrightarrow M$$

das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ abhängt.

Aufgabe 86.12. Welche der folgenden Funktionen

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

lassen sich differenzierbar in den Randpunkt 0 fortsetzen.

(1) $x^3 + \sin^3 x - e^{-x}$,
(2) $\frac{1}{x}$,
(3) $\sin \frac{1}{x}$,
(4) $x \sin \frac{1}{x}$,
(5) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$,

(6) $x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 86.13. Es sei $H \subset \mathbb{R}^n$ ein Halbraum. Es sei $Q \in H$ ein Punkt und $Q \in U \subseteq H$, wobei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sei. Zeige, dass Q kein Randpunkt von H ist.

Aufgabe 86.14. Definiere die Begriffe *Diffeomorphismus*, *totales Differential* und *höhere Ableitungen* für Halbräume (bzw. offene Teilmengen davon).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 86.15. (3 Punkte)

Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = xy^2z^3dx + xyzdy + x^3yz^4dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 86.16. (3 Punkte)

Bestimme die äußere Ableitung der 2-Differentialform

$$\omega = xy^2dx \wedge dy + (x^3 - y^2z^4)dy \wedge dz + \sin(xy)\, dx \wedge dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 86.17. (5 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es seien $\omega_1, \ldots, \omega_r$ Differentialformen auf U, wobei ω_i eine k_i-Differentialform sei. Finde und beweise eine Formel für

$$d(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r)\,.$$

Aufgabe 86.18. (5 Punkte)

Zeige, dass die Differentialform

$$\omega = (2xy + 3x^2 - ye^{xy})dx + (x^2 - xe^{xy} + 8y)dy$$

auf dem $\mathbb{R}^2$ geschlossen und auch exakt ist.

Aufgabe 86.19. (6 Punkte)

Zeige, dass die Halbebene $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ und der Quadrant $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ homöomorph sind.