Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 84

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 84.1. Wir betrachten eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was ist die kanonische Volumenform auf V?

AUFGABE 84.2. Wir betrachten eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als riemannsche Mannigfaltigkeit. Was besagt die in Lemma 84.3 beschriebene Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Differentialformen in dieser Situation?

AUFGABE 84.3. Es sei M eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die kanonische Volumenform ω dadurch festgelegt ist, dass sie in jedem Punkt für eine die Orientierung repräsentierende Orthonormalbasis den Wert 1 besitzt.

AUFGABE 84.4. Zeige, dass bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit die Kartenabbildungen

$$\alpha\colon\, U \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Isometrie

$$T_P(\alpha)\colon\, T_P U \longrightarrow T_{\alpha(P)} V$$

induzieren (wenn $T_P U$ mit $\langle -, - \rangle_P$ und $T_{\alpha(P)} V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen ist).

AUFGABE 84.5.*

Wir betrachten den Graph M der Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (u,v) \longmapsto u^2 + uv - v^3,$$

als zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, also

$$M = \left\{ (u, v, u^2 + uv - v^3) | \, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten riemannschen Metrik. Es sei

$$\psi\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow M,\, (u,v) \longmapsto (u, v, u^2 + uv - v^3),$$

die zugehörige Diffeomorphie.

a) Bestimme das totale Differential zu ψ sowie die Bildvektoren $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)} M$.

b) Bestimme für jeden Punkt der Form $P=(u,0)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Bestimme für jeden Punkt der Form $P=(0,v)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgaben zum Abgeben

Bei einer riemannschen Mannigfaltigkeit M definiert man zu einem Tangentialvektor $v \in T_PM$ die Norm durch $|| v ||= \sqrt{\langle v, v\rangle_P}$.

Aufgabe 84.6. (4 Punkte)

Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Zuordnung

$$TM \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto || v ||,$$

stetig ist.

Aufgabe 84.7. (3 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ mit der durch die Hesse-Form zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2+y^4,$$

gegebenen Bilinearform eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 84.8. (4 Punkte)

Man gebe für jeden Punkt $P=(x,y,z)$ der Einheitssphäre K eine Orthonormalbasis in $T_PK \subset \mathbb{R}^3$ an (bezüglich der induzierten riemannschen Struktur).

Aufgabe 84.9. (6 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Ellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) |\, x^2+y^2+3z^2 \leq 5 \right\}$$

und die Ebene

$$M = \{ (x,y,z) |\, 7x-3y-2z = 2 \}$$

gegeben. Berechne den Flächeninhalt des Durchschnitts $M \cap E$.

Aufgabe 84.10. (6 Punkte)

Man erstelle eine Computergraphik, die die in Bemerkung 84.4 beschriebene Situation anhand einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht.