Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 82

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 82.1. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung aus offenen Mengen, wobei I abzählbar sei. Zeige folgende Aussagen.

a) Eine Teilmenge $T \subseteq X$ ist genau dann eine Borelmenge, wenn $T \cap U_i$ eine Borelmenge ist für jedes $i \in I$.

b) Ein σ-endliches Maß μ ist durch die Einschränkungen $\mu_i = \mu|_{U_i}$ eindeutig bestimmt.

c) Es sei für jedes $i \in I$ ein σ-endliches Maß μ_i auf U_i gegeben. Für jedes Paar $i, j \in I$ sei

$$\mu_i|_{U_i \cap U_j} = \mu_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes σ-endliches Maß auf X mit $\mu|_{U_i} = \mu_i$.

Aufgabe 82.2. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Zeige, dass man auf $\bigwedge^k T^*M$ für jedes k eine Topologie erklären kann, bei der für jede Karte $\alpha\colon U \to V$ die Abbildung

$$\bigwedge^k T^*U \longrightarrow \bigwedge^k T^*V \cong V \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$$

eine Homöomorphie ist.

Damit kann man von stetigen und auch von messbaren Differentialformen sprechen.

Aufgabe 82.3. Es sei M eine C^2-differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Zeige, dass $\bigwedge^k T^*M$ für jedes k eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 82.4. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}^k(M)$ die Menge der k-Formen auf M. Zeige, dass $\mathcal{E}^k(M)$ ein R-Modul zu $R = C^1(M, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 82.5. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $P \in M$ ein Punkt und $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei $v \in T_PM$ ein Tangentialvektor, der durch einen differenzierbaren Weg

$$\gamma\colon\ ]-\delta, \delta[\longrightarrow M$$

mit $\gamma(0) = P$ repräsentiert werde. Zeige die Gleichheit

$$(df)(P, v) \;=\; (f \circ \gamma)'(0).$$

AUFGABE 82.6. Es sei $i : M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass für eine differenzierbare Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$i^*(df) \;=\; d(f \circ i)$$

gilt.

AUFGABE 82.7.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, xy - z^3).$$

Berechne die Matrix der Abbildung

$$\bigwedge^2 T_P(\varphi) \colon \bigwedge^2 T_P\mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigwedge^2 T_{\varphi(P)}\mathbb{R}^2$$

im Punkt $P = (1, 3, 5)$ bezüglich einer geeigneten Basis.

AUFGABE 82.8. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ (u, v) \longmapsto (u^2, v^3 - u),$$

und die 2-Differentialform

$$\omega \;=\; \frac{1}{x^2 + y^2} dx \wedge dy.$$

Bestimme die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$.

AUFGABE 82.9. Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $\omega = g(s)ds$ eine 1-Differentialform auf $\mathbb{R}$. Bestimme $f^*\omega$.

AUFGABE 82.10.*

Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\tau$ zu

$$\tau = dx \wedge dy \wedge dz - w dx \wedge dy \wedge dw + \cos(xy)\, dx \wedge dz \wedge dw - yw dy \wedge dz \wedge dw$$

unter der Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (r, s, t) \longmapsto (r^2 s, t, \sin r, e^{st}) = (x, y, z, w).$$

Aufgabe 82.11.*

Es seien $W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei

$$\psi \colon W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei ψ^* das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 82.12. (6 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Es sei ω eine k-Differentialform, also eine Abbildung

$$\omega \colon M \longrightarrow \bigwedge^k T^*M$$

mit $\omega(P) \in \bigwedge^k T_P^*M$ für alle $P \in M$, wobei dieses Dachprodukt mit der natürlichen Topologie (siehe Aufgabe 82.2) versehen sei. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) ω ist stetig.
(2) Für jede Karte $\alpha \colon U \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und mit der lokalen Darstellung $\alpha_* \omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_J dx_J$ sind die Funktionen f_J stetig.
(3) Es gibt eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit Kartengebieten U_i derart, dass in den lokalen Darstellungen $\alpha_{i*}\omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_{iJ} dx_J$ die Funktionen f_{iJ} stetig sind.

Aufgabe 82.13. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M. Es seien $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ und $\tau \in \mathcal{E}^\ell(M)$ Differentialformen auf M. Zeige die Gleichung

$$\varphi^*(\omega \wedge \tau) \,=\, \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau .$$

Aufgabe 82.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow N = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, z \neq 0\big\},$$
$$(u,v,w) \longmapsto (uvw, u^2 - vw^5, u^2 + v^2 + w^2),$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = z^2 dx \wedge dy + \frac{xy}{z} dx \wedge dz + (xe^y - z) dy \wedge dz$$

auf N. Bestimme die zurückgezogene Differentialform $\varphi^* \omega$.

Aufgabe 82.15. (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der Gleichungskette im Beweis zu Lemma 82.8.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

(1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile

[[/Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).

(2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort

{{:Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Begründungsfenster}}

ein.

(3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleich-Zeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.

(4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite(die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort

[[Ihr Benutzername/Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

hinschreiben.