Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 81

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 81.1. Schaue in einen Spiegel. Vertauscht die Spiegelung links und rechts, oben und unten, vorne und hinten? Durch welche lineare Abbildung wird eine Spiegelung beschrieben?

Aufgabe 81.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass auf der Menge der (geordneten) Basen die Orientierungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist, die bei $V \neq 0$ aus genau zwei Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 81.3. Sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Zeige, dass wenn man einen Vektor v_i durch sein Negatives $-v_i$ ersetzt, dass dann die neue Basis die entgegengesetzte Orientierung repräsentiert.

Aufgabe 81.4. Es seien V und W zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann orientierungstreu ist, wenn es eine die Orientierung auf V repräsentierende Basis $v_1, \ldots, v_n$ gibt, deren Bildvektoren $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ die Orientierung auf W repräsentieren.

Aufgabe 81.5.*

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 81.6.*

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 81.7.*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ repräsentieren.

b) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die der Standardorientierung entgegengesetzte Orientierung repräsentieren.

Aufgabe 81.8. Es seien M_1 und M_2 orientierte Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass dann auch das Produkt $M_1 \times M_2$ eine orientierte Mannigfaltigkeit ist (wobei die Orientierung von der Ordnung auf $\{1, 2\}$ abhängt).

Es seien M und N orientierte Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Diese heißt φ *orientierungstreu*, wenn für jeden Punkt $P \in M$ die Tangentialabbildung

$$T\varphi\colon T_P M \longrightarrow T_{\varphi(P)} N$$

bijektiv und orientierungstreu ist.

Aufgabe 81.9. Zeige, dass die antipodale Abbildung

$$\varphi\colon S^1 \longrightarrow S^1, \, P \longmapsto -P,$$

orientierungstreu ist.

Aufgabe 81.10. Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Vertauschungsabbildung

$$\varphi\colon M \times M \longrightarrow M \times M, \, (P, Q) \longmapsto (Q, P),$$

bezüglich den jeweiligen Produktorientierungen nicht orientierungstreu sein muss.

Aufgabe 81.11. Es sei X ein topologischer Raum, der nur aus endlich vielen Elementen bestehe. Zeige, dass X kompakt ist.

Aufgabe 81.12. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 81.13. Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Zeige, dass Y ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 81.14. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild von f homöomorph zu einem offenen, einem halboffenen, einem abgeschlossenen Intervall oder zu S^1 ist.

Aufgabe 81.15. Es sei

$$f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild von f homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall ist.

Aufgabe 81.16. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 81.17. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und versehen sie mit der diskreten Metrik. Zeige, dass $\mathbb{N}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 81.18. Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass X vollständig ist.

Aufgabe 81.19.*

Zeige, dass die Menge

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^6 = 1 \right\}$$

eine zweidimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 81.20. (4 Punkte)

Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 81.21. (6 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Zeige, dass es auf V, aufgefasst als reellen Vektorraum, eine natürliche Orientierung gibt

Aufgabe 81.22. (4 Punkte)

Zeige, dass die 1-Sphäre S^1 eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 81.23. (4 Punkte)

Zeige, dass die Antipodenabbildung

$$S^2 \longrightarrow S^2,\ (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,-z),$$

nicht orientierungstreu ist.

Aufgabe 81.24. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 81.25. (4 Punkte)

Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 81.26. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und sei das Produkt $V^n = V \times \cdots \times V$ mit der Produkttopologie versehen. Es sei I ein reelles Intervall und

$$\varphi\colon I \longrightarrow V^n$$

eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

für jedes $t \in I$ eine Basis von V ist. Zeige, dass sämtliche Basen $\varphi(t)$, $t \in I$, die gleiche Orientierung auf V repräsentieren.