Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 80

Aufwärmaufgaben

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufgabe 80.1. Sei $R > 0$ und betrachte die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 .$$

Bestimme die regulären Punkte der Abbildung und die Gestalt der Faser über $s \in \mathbb{R}$. Wie ändert sich die Gestalt beim Übergang von $\sqrt{s} < R$ zu $\sqrt{s} > R$.

Aufgabe 80.2. Drücke das Dachprodukt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.

Die in der folgenden Aufgabe konstruierte Basis des Dualraums heißt *Dualbasis*.

Aufgabe 80.3. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der sogenannte *Dualraum* zu V. Zeige, dass auf V^* die Koordinatenfunktionen $v_1^*, \ldots, v_n^*$, die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^* bilden.

Aufgabe 80.4. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. Zeige, dass die Abbildung

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow K,\ (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det\left(f_i(v_j)\right)_{1 \leq i,j \leq k},$$

multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 80.5. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu $\bigwedge^2 \varphi$ bezüglich den Standardbasen der Dachprodukte.

Aufgabe 80.6. Betrachte Geschenkpapier. Auf welche Arten kann man das Papier zerschneiden und/oder verkleben, so, dass eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit entsteht. Sollte der Rand des Papiers dazu gehören oder nicht? Welche entstehenden Mannigfaltigkeiten sind zusammenhängend, welche kompakt? Wie entsteht ein Möbius-Band? Welche Möglichkeiten gibt es, wenn man endlich viele Ausnahmepunkte erlaubt, in denen keine Mannigfaltigkeitsstruktur vorliegt?

Wende die Theorie an, um möglichst originelle Verpackungen zu konstruieren. Verschnüre diese mit geeigneten eindimensionalen Mannigfaltigeiten.

Aufgabe 80.7. Berechne die Tangentialabbildung $T\varphi$ zu

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto \left(x^2y - 3xz^3 + y^2, x \sin y - e^{yz}\right)$$

unter Verwendung der Identifizierungen $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 80.8. Zeige, dass die Antipodenabbildung

$$S^n \longrightarrow S^n,\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \longmapsto (-x_1, \ldots, -x_{n+1}),$$

ein fixpunktfreier Diffeomorphismus ist, der zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 80.9. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon\ S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R},\ (x_1, x_2; t) \longmapsto (-x_1, -x_2; -t),$$

ein fixpunktfreier Diffeomorphismus ist, der zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 80.10. Zeige, dass eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 1$ unendlich viele Diffeomorphismen

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow M$$

besitzt.

Aufgabe 80.11. Die Einheitssphäre S^2 bewege sich in einer Sekunde vollständig (vom Nordpol aus gesehen gegen den Uhrzeigersinn) um die Polachse. Welche differenzierbare Kurve und welcher Tangentialvektor an einen Punkt $P \in S^2$ gehört zu dieser Bewegung? Beschreibe das zugehörige Vektorfeld

$$S^2 \longrightarrow TS^2 \subseteq T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6.$$

Aufgabe 80.12. Man entwickle die Grundzüge einer Theorie der „komplexen Mannigfaltigkeiten“. Was ist die zugrunde liegende reelle Mannigfaltigkeit, was ist die (komplexe/reelle) Dimension, wie sieht der Tangentialraum aus?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 80.13. (2 Punkte)

Drücke das Dachprodukt $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.

Aufgabe 80.14. (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$-2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in der Standardbasis von $\bigwedge^3 \mathbb{R}^4$ aus.

Aufgabe 80.15. (5 Punkte)

Wir betrachten das zweite Dachprodukt $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $e_i \wedge e_j$, $i < j$, und der zugehörigen Dualbasis $\varphi_{ij} = e_{ij}^*$. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi\colon\ \bigwedge^2 \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \varphi(x) = \sqrt{\sum_{i<j} (\varphi_{ij}(x))^2},$$

die Eigenschaft besitzt, dass $\varphi(v \wedge w)$ mit dem Flächeninhalt des von v und w im $\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops übereinstimmt.

Aufgabe 80.16. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu $\bigwedge^2 \varphi$ bezüglich den Standardbasen der Dachprodukte.

Aufgabe 80.17. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $u_1, \ldots, u_n \in V$. Zeige, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k+n} V$$

mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ gibt.

Aufgabe 80.18. (5 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ und die dadurch induzierte Basis

$$\mathfrak{v} = v_1 \wedge v_2,\ v_1 \wedge v_3,\ v_2 \wedge v_3$$

von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. Bestimme die Übergangsmatrizen (in beide Richtungen) zwischen der Basis $\mathfrak{v}$ und der Standardbasis $e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3$.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 80.19. (10 Punkte)

Erstelle eine Animation, die Aufgabe 80.1 illustriert.