Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 79

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 79.1. Zeige, dass das Produkt $M \times N$ von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N selbst wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

AUFGABE 79.2. Es seien $M_1 \subseteq N_1$ und $M_2 \subseteq N_2$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten. Zeige, dass ihr Produkt $M_1 \times M_2$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $N_1 \times N_2$ ist.

AUFGABE 79.3. Beschreibe die Karten auf dem Torus $S^1 \times S^1$, die von den stereographischen Projektionen herrühren.

AUFGABE 79.4. Zeige, dass das Produkt $M \times N$ von zwei wegzusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N wieder wegzusammenhängend ist.

AUFGABE 79.5. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\varphi\colon M \longrightarrow M \times M,\, x \longmapsto (x,x),$$

die Diagonalabbildung in das Produkt $M \times M$. Zeige, dass die Diagonale $\varphi(M)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

AUFGABE 79.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Vertauschungsabbildung

$$M \times M \longrightarrow M \times M,\, (P,Q) \longmapsto (Q,P),$$

ein Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 79.7. Beschreibe den Torus $S^1 \times S^1$ als Rotationsmenge.

Aufgabe 79.8. Definiere die Abbildung

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow S^2,$$

die zu einem Winkelpaar (α, β) die erste Komponente als Äquatorpunkt interpretiert und von dort aus mit der zweiten Komponente auf dem Großkreis Richtung Norden wandert. Ist die Abbildung differenzierbar? Wie sehen die Fasern der Abbildung aus?

Aufgabe 79.9. Man gebe ein heuristisches Argument, dass die Einheitssphäre S^2 und der Torus $S^1 \times S^1$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 79.10. Zu welcher differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist $S^1 \times S^1 \setminus \triangle$, also der Torus ohne die Diagonale, diffeomorph?

Aufgabe 79.11. Betrachte die Kreislinie S^1. Definiere eine *differenzierbare Gruppenstruktur* auf S^1, also ein neutrales Element $P \in S^1$, eine differenzierbare Abbildung

$$n \colon S^1 \longrightarrow S^1,\, x \longmapsto n(x),$$

und eine differenzierbare Abbildung

$$T = S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1,\, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

derart, dass S^1 mit diesen Daten zu einer kommutativen Gruppe wird.

Aufgabe 79.12.*

Sei X ein Torus. Man gebe eine surjektive differenzierbare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$$

an derart, dass auch die Tangentialabbildung

$$T_P(\varphi) \colon T_P\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(P)}X$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ surjektiv ist.

Aufgabe 79.13. Es sei $M \subseteq N$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der differenzierbaren Mannigfaltigkeit N. Zeige, dass $TM \subseteq TN$ eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Aufgabe 79.14. Man gebe ein Beispiel einer zweidimensionalen zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und einem Punkt $P \in M$ derart, dass M und $M \setminus \{P\}$ zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 79.15. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon\, M \times M \longrightarrow M$$

und

$$\cdot\colon\, K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$

für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$. Zeige, dass M ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 79.16. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige die Gleichheit $V = \bigwedge^1 V$.

Aufgabe 79.17. Sei K ein Körper und V ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $n > m$. Zeige $\bigwedge^n V = 0$.

Aufgaben zum Abgeben

In der folgenden Aufgabe wird der Begriff eines R-Moduls verwendet (das ist eine direkte Verallgemeinerung des Vektorraumsbegriffes).

Sei R ein kommutativer Ring und $M = (M, +, 0)$ eine *additiv* geschriebene kommutative Gruppe. Man nennt M einen *R-Modul*, wenn es eine Operation

$$R \times M \longrightarrow M,\, (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v\,,$$

(*Skalarmultiplikation* genannt) gibt, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien $r, s \in R$ und $u, v \in M$ beliebig):

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u+v) = (ru) + (rv)$,
(3) $(r+s)u = (ru) + (su)$,
(4) $1u = u$.

Aufgabe 79.18. (4 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $R = C^1(M, \mathbb{R})$ der Ring der differenzierbaren Funktionen auf M und sei F die Menge aller Vektorfelder auf M.

a) Definiere eine Addition auf F derart, dass F zu einer kommutativen Gruppe wird.

b) Definiere eine Skalarmultiplikation

$$R \times F \longrightarrow F,\ (f,s) \longmapsto fs,$$

derart, dass F zu einem R-Modul wird.

Aufgabe 79.19. (5 Punkte)

Sei $0 < r < R$ und sei

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} .$$

Zeige, dass die Abbildung

$S^1 \times S^1 \longrightarrow T,\ (\varphi, \psi) \longmapsto ((R+r \cos \psi) \cos \varphi , (R+r \cos \psi) \sin \varphi , r \sin \psi)$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 79.20. (6 Punkte)

Sei T ein Torus und seien $P,Q \in T$ zwei Punkte. Zeige, dass es eine gemeinsame Kartenumgebung $P,Q \in U \subseteq T$ derart gibt, dass die Kartenabbildung

$$\alpha \colon U \longrightarrow V$$

eine Homöomorphie mit $V =]0,1[\times]0,1[$ ergibt.

Aufgabe 79.21. (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

im $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Dachprodukte $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$ und $e_2 \wedge e_3$ aus.