Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 75

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 75.1. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ (u,v) \longmapsto \left(\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2} \right),$$

ein Diffeomorphismus ist.

Auf einer Kugeloberfläche $K \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man einen Durchschnitt von K mit einer Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt läuft, einen *Großkreis* auf K. Zwei Punkte $P, Q \in K$, $P \neq Q$, heißen *antipodal*, wenn ihre Verbindungsgerade durch den Kugelmittelpunkt läuft.

Aufgabe 75.2. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugeloberfläche. Zeige, dass je zwei nicht antipodale Punkte $P, Q \in K$, $P \neq Q$, auf genau einem Großkreis von K liegen.

Warum fliegt das Flugzeug einen Bogen?

Aufgabe 75.3. Ein Flugzeug soll von Osnabrück aus zu einem Zielort auf der Südhalbkugel fliegen. Kann es kürzer sein, in Richtung Norden zu fliegen?

Aufgabe 75.4. Lucy Sonnenschein findet, dass die Tage zu kurz sind. Daher entschließt sie sich, jeden Tag, und zwar bei Tageslicht, um eine Zeitzone nach Westen zu fliegen, damit jeder Tag 25 statt 24 Stunden besitzt.

(1) Kann Lucy Sonnenschein mit dieser Strategie den Anteil an Lichtstunden in ihrem Leben erhöhen?
(2) Kann Lucy Sonnenschein mit dieser Strategie ihr Leben verlängern?

(3) Lucy hat jetzt Freunde in aller Welt. Nach wie vielen Tagen sieht sie sie wieder?
(4) Wodurch erlebt Lucy zeitliche Einbußen, die ihren täglichen Zeitgewinn ausgleichen?
(5) Hat das was mit Relativitätstheorie zu tun?

Aufgabe 75.5. Zeige, dass zu zwei Punkten $A, B \neq N, S$ auf der Einheitssphäre S^2 die Differenz der in den beiden stereographischen Standardkarten genommenen Abständen, also $d(\alpha_1(A), \alpha_1(B))$ und $d(\alpha_2(A), \alpha_2(B))$ beliebig klein und beliebig groß sein kann.

Die vorstehende Aufgabe zeigt, dass man über Karten im Allgemeinen keinen sinnvollen Abstandsbegriff auf einer Mannigfaltigkeit erhalten kann. Eine natürliche Metrik auf der Einheitssphäre ergibt sich durch die induzierte Metrik des $\mathbb{R}^3$ oder durch den geodätischen Abstand, siehe Aufgabe 75.18.

Aufgabe 75.6. Zeige, dass ein halboffenes Intervall $[a, b[$ keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 75.7. Es sei $I = [0, 1[$ das (nach oben) halboffene Einheitsintervall und S^1 der Einheitskreis. Zeige, dass es eine bijektive stetige Abbildung

$$f\colon I \longrightarrow S^1$$

gibt, dass aber I und S^1 nicht homöomorph sind.

Aufgabe 75.8.*

Zeige, dass die drei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten

$$S^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \, |(x, y)| = 1 \right\}, \, \mathbb{R}$$

und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ paarweise nicht homöomorph sind.

Aufgabe 75.9. Es sei M der Graph der durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

gegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass M keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 75.10. Zeige, dass ein offener Ball $U(P, r) \subseteq \mathbb{R}^m$ C^∞-diffeomorph zum $\mathbb{R}^m$ ist.

Aufgabe 75.11.*

Sei
$$S = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 | \ || P || = 1 \right\}$$
die Einheitssphäre. Zu $v = (a, b, c) \neq 0$ ist
$$E_v = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, ax + by + cz = 0 \right\}$$
eine Ebene durch den Nullpunkt, die einen Großkreis (einen „Äquator“) und zwei offene Halbsphären auf S definiert.

a) Beschreibe zu $v = (a, b, c) \neq 0$ den zugehörigen Großkreis und die beiden Halbsphären mit Gleichungen bzw. mit Ungleichungen.

b) Zeige, dass man S nicht mit drei offenen Halbsphären überdecken kann.

Aufgabe 75.12. Zeige, dass die offene Zylinderoberfläche $S^1 \times]0, 1[$ zu $S^1 \times \mathbb{R}$, zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und zu $S^2 \setminus \{N, S\}$ homöomorph ist.

Aufgabe 75.13. Es sei $]a, b[$ ein offenes Intervall und
$$f \colon \,]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
eine stetige Funktion. Es sei M die äußere Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers. Zeige, dass diese Menge bei $f > 0$ eine zu einem offenen Zylinder homöomorphe Mannigfaltigkeit ist. Zeige ferner, dass keine Mannigfaltigkeit vorliegt, wenn f sowohl Nullstellen als auch positive Werte besitzt.

Aufgabe 75.14. Zeige, dass eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 75.15. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung mit Karten
$$\alpha_i \colon U_i \longrightarrow V_i$$
mit $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$. Zu $i, j \in I$ seien
$$\varphi_{ij} = \alpha_j \circ (\alpha_i)^{-1} \colon V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j)$$
die Übergangsabbildungen. Zeige, dass zu $i, j, k \in I$ die sogenannte *Kozykelbedingung* (auf welchen Teilmengen)
$$\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$$
gilt.

Aufgabe 75.16. Überprüfe die Kozykelbedingung (siehe Aufgabe 75.15) für die Einheitssphäre $M = S^2$ und die drei stereographischen Projektionen vom Nordpol, vom Südpol und von $P = (1, 0, 0)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 75.17. (3 Punkte)

Bestimme das Bild der Großkreise durch die beiden Pole auf der Einheitssphäre unter der stereographischen Projektion vom Nordpol aus.

Aufgabe 75.18. (5 Punkte)

Zeige, dass auf der Einheitssphäre $K \subset \mathbb{R}^3$ durch folgende Zuordnung eine Metrik festgelegt wird. Für $P, Q \in K$ ist $d(P, Q)$ die Länge des (kürzeren) Verbindungsweges von P nach Q auf dem durch diese Punkte festgelegten Großkreis (berücksichtige auch die Fälle $P = Q$ und P, Q antipodal).

Aufgabe 75.19. (8 Punkte)

Wir fixieren die beiden Punkte $N = (0, 0, 1)$ und $P = (1, 0, 0)$ auf der Einheitssphäre K. Es sei G die Verbindungsgerade und es sei H die zu G senkrechte Ebene durch N. Führe auf H einen parametrisierten Einheitskreis E mit N als Mittelpunkt ein. Bestimme zu $S \in E$ die Länge des (kürzeren) Weges von N nach P auf demjenigen Kreis, der durch den Schnitt von K mit der durch N, P und S gegebenen Ebene festgelegt ist.

Aufgabe 75.20. (6 Punkte)

Man gebe eine injektive stetige Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^2,$$

die (als Abbildung nach $\mathbb{R}^3$) rektifizierbar ist und unendliche Länge besitzt, und für die $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = N$ und $\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = S$ gilt.

Aufgabe 75.21. (4 Punkte)

Zeige, dass das Achsenkreuz keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 75.22. (6 Punkte)

Erstelle eine Animation, die die geometrischen Objekte aus Aufgabe 15.19 darstellt.