Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 74

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 74.1. Es sei

$$\varphi\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Was besagt in dieser Situation die Transformationsformel für Quader und was die Newton-Leibniz-Formel?

Aufgabe 74.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ (x,y) \longmapsto (xe^y, -e^{-y}),$$

in jedem Punkt volumentreu, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 74.3. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y),$$

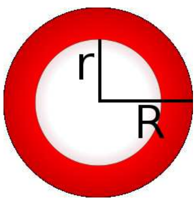
flächentreu ist.

Aufgabe 74.4. Es sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit offenen zusammenhängenden Mengen G und H im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ genau dann maßtreu ist, wenn die Jacobi-Determinante überall den Wert 1 oder überall den Wert -1 hat.

Aufgabe 74.5. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



Aufgabe 74.6. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 74.7. (5 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, es sei

$$g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare nichtnegative integrierbare Funktion und sei $g\mu$ das Maß zur Dichte g. Zeige, dass für jede messbare Funktion

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$\int_M f\, d(g\mu) = \int_M fg\, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 74.8. (5 Punkte)

Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei σ-endliche Maßräume, und es seien

$$g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h\colon N \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare nichtnegative integrierbare Funktionen mit den zu diesen Dichten gehörigen Maßen $g\mu$ und $h\nu$. Zeige, dass auf $M \times N$ das Produktmaß $(g\mu) \otimes (h\nu)$ mit dem Maß zur Dichte

$$gh\colon M \times N \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto g(x)h(y),$$

bezüglich $\mu \otimes \nu$ übereinstimmt.

Aufgabe 74.9. (6 Punkte)

Berechne den Wert des Quadrats $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x|, |y| \leq 1\}$ für das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^2$ unter der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

Aufgabe 74.10. (7 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graphen) untereinander überschneidungsfrei sind.

b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.

c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.