Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 73

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 73.1. Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader $Q = [a,b] \times [c,d]$.

AUFGABE 73.2. Es sei G der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2 \, .$$

AUFGABE 73.3. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und es sei

$$g \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, \, T \longmapsto \int_T g \, d\mu$$

ein Maß auf M ist.

AUFGABE 73.4. Welche Dichte besitzt das Borel-Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Borel-Lebesgue-Maßes?

AUFGABE 73.5. Man gebe ein Beispiel für ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das keine Dichte bezüglich dem Borel-Lebesgue-Maß besitzt.

AUFGABE 73.6. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x,y) \longmapsto (x + \sin y \, , y + \cos x \,).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det (D\varphi)_P|$ auf dem Quadrat $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

Aufgabe 73.7.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r,s,t) = s^2t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0,1]^3$.

Aufgabe 73.8.*

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0,\pi]$, wobei G mit dem zweidimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^2 versehen sei. Berechne die beiden folgenden Integrale.

a) $\int_G x \, d\lambda^2$

b) $\int_G y \, d\lambda^2$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 73.9. (6 Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und π. Berechne die Integrale

a) $\int_G x \, d\lambda^2$,

b) $\int_G y \, d\lambda^2$.

Aufgabe 73.10. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion $f(x,y) = x(\sin x)(\cos(xy))$ über dem Rechteck $Q = [0,3\pi] \times [0,1]$.

Aufgabe 73.11. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (u,v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2+1)(v^2+v+1)}.$$

Für welche Quadrate $Q = [a,a+1] \times [b,b+1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

Aufgabe 73.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det(D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $Q_2 = [1,2] \times [1,2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?

Aufgabe 73.13. (6 Punkte)

Wir betrachten das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^n$ zur Abbildung $(n \geq 1)$

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

a) Zeige, dass μ ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeige, dass μ bezüglich λ^1 die Dichte

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0\,, \\ n\beta_n t^{n-1} & \text{falls } t \geq 0\,, \end{cases}$$

besitzt, wobei β_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.