Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 72

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 72.1. Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

Aufgabe 72.2. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und π um die x-Achse gedreht wird.

Aufgabe 72.3.*

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die t-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 72.4. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die y-Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu $y = h$ „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von $h \geq 0$.

Aufgabe 72.5. Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 72.6. Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.

Aufgabe 72.7. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man aus dem Einheitszylinder, dessen Grundfläche eine Einheitskreisscheibe ist und der die Höhe 1 besitzt, den (offenen) Kegel herausnimmt, der den oberen Zylinderdeckel als Grundfläche und den unteren Kreismittelpunkt als Spitze besitzt.

Aufgabe 72.8.*

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha\, , f(x) \sin \alpha\,) |\, x \in [a,b],\, \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

das Volumen 0 besitzt.

Aufgabe 72.9. Wo liegt der Fehler in Beispiel 72.7?

Aufgabe 72.10. Diskutiere den Wikipediaartikel „Prinzip von Cavalieri“, insbesondere in Hinblick auf die Formulierung:

„Aus dem Prinzip von Cavalieri lässt sich herleiten, dass das Volumen eines 'höhengedehnten' Körpers (bei gleichbleibender Grundfläche) proportional zu seiner Höhe ist. Als Beispiel: Ein Körper, dessen Höhe auf diese Weise verdoppelt wird, kann durch 2 gleiche Ausgangskörper konstruiert werden, indem zuerst alle äquivalenten Schnittflächen zusammengelegt werden und diese in der entsprechenden Reihenfolge des Ausgangskörpers aufgeschichtet werden (beide Ausgangskörper werden quasi ineinandergeschoben) “. (Version vom 24. Oktober 2014).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 72.11. (5 Punkte)

Es sei K die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in $(0, R)$ und dem Radius $0 < r < R$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich K um die x-Achse dreht.

Aufgabe 72.12. (6 Punkte)

Es sei V der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in $(1, 0)$, dem Radius 1 und den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man V um die y-Achse dreht.

Aufgabe 72.13. (5 Punkte)

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(3, 4)$, $(5, 5)$ und $(4, 6)$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man D um die x-Achse dreht.

Aufgabe 72.14. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in $(2,3,5)$ liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3x^2 + 2y^2 \leq 4\right\}$$

gegebene Ellipse ist.

Aufgabe 72.15. (8 Punkte)

Es sei $\mu = \varphi_* \lambda^2$ das Bildmaß unter der Multiplikation

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy.$$

Zeige, dass für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \lambda^1(T) = 0\,, \\ \infty, \text{ falls } \lambda^1(T) > 0\,, \end{cases}$$

gilt.