Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 71

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 71.1. Sei

$$f(x,y) = x^3 - yx^2 + 7\sin y\ .$$

Berechne die Integrale zum Parameter $y \in [0,\pi]$ über $x \in [0,1]$ und zum Parameter $x \in [0,1]$ über $y \in [0,\pi]$. Bestimme jeweils die extremalen Integrale.

Mit Aufgabe 71.10 ist jetzt die folgende Aufgabe einfach zu lösen.

Aufgabe 71.2.*

Es sei

$$f\colon\ ]0,1] \longrightarrow [0,\infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon\ [0,\infty[\longrightarrow]0,1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y)\,dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche Beispiel 35.5.

Aufgabe 71.3. Es sei

$$E = \left\{ \frac{1}{n} |\, n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

(mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik) und es seien ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$g, f_n\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen auf einem σ-endlichen Maßraum M. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ E \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(\frac{1}{n}, x) = f_n(x)$$

und

$$f(0,x) = g(x).$$

Diskutiere den Satz von der majorisierten Konvergenz und Satz 71.1 in dieser Situation.

Aufgabe 71.4.*

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und A_t, $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{A_t}. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,x) \longmapsto f(t,x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 71.1 sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 71.5. Es seien $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestätige Satz 71.2 für

a) $f(x,y) = g(x) + h(y)$,

b) $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$.

Aufgabe 71.6. Zeige, dass die dritte Bedingung in Korollar 71.3 äquivalent zur Existenz von nichtnegativen, integrierbaren Funktionen

$$h_i\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$|| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z,x) || \leq h_i(x)$$

ist.

Aufgabe 71.7. Begründe die Additivität des Integrals mit Hilfe von Satz 71.5.

Aufgabe 71.8. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, dass die Menge der Nullmengen von M ein Mengen-Präring ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 71.9. (3 Punkte)

Es seien $[a,b]$ und $[c,d]$ kompakte Intervalle und es sei

$$f\colon [a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R},$$

eine stetige Funktion. Zeige mit Hilfe von Satz 71.1, dass auch die Funktion

$$[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\, x\longmapsto\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

stetig ist.

Aufgabe 71.10. (3 Punkte)

Es sei $]a,b[$ ein (eventuell unbeschränktes) Intervall und es sei

$$f\colon\,]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine nichtnegative stetige Funktion. Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{]a,b[} f\,d\lambda$ (also gleich dem Flächeninhalt des Subgraphen) ist.

Aufgabe 71.11. (4 Punkte)

Zeige, dass die Fakultätsfunktion $\operatorname{Fak}(x)$ beliebig oft differenzierbar ist mit den Ableitungen

$$\operatorname{Fak}^{(n)}(x)=\int_0^\infty(\ln t)^n t^x e^{-t}\,dt\,.$$