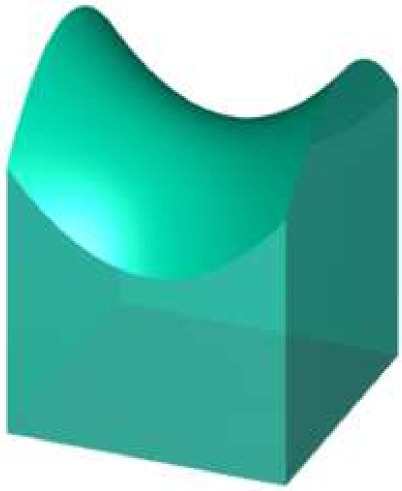
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 69

Integrierbare Funktionen



Wir führen nun das *Lebesgue-Integral* für messbare Funktionen auf einem Maßraum ein. Dieser Integralbegriff hat gegenüber dem Riemann-Integral folgende Vorteile.

(1) Der Integralbegriff bekommt ein maßtheoretisches Fundament.
(2) Es kann über einer (fast) beliebigen Menge integriert werden.
(3) Es kann eine weit größere Funktionenklasse integriert werden.
(4) Das Grenzwertverhalten von Funktionenfolgen ist einfacher.
(5) Man kann Funktionen auf Nullmengen abändern, ohne das Integral zu verändern.
(6) Die Summe einer abzählbaren Familie reeller Zahlen ist ein Spezialfall.

Definition 69.1. Sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \left\{ (x,y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \,|\, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

den *Subgraphen* der Funktion.

Lemma 69.2. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und*

$$f\colon\, M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann sind der Graph $\Gamma(f)$ und der Subgraph $S(f)$ messbare Teilmengen in $M \times \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Die Projektion

$$p_2\colon\, M \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, (x,y) \longmapsto y,$$

ist nach Lemma 64.9 messbar, und ebenso ist

$$\psi : M \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_1} M \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$$

messbar. Nach Lemma 64.11 und Lemma 68.3 ist dann auch die Abbildung[1]

$$\varphi : M \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_2 \times \psi} \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{-} \overline{\mathbb{R}}$$

messbar. Es ist

$$\Gamma(f) \,=\, \left\{(x,y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} |\, y = f(x)\right\} \,=\, \varphi^{-1}(0)$$

und

$$S(f) \,=\, \left\{(x,y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} |\, 0 \leq y \leq f(x)\right\} \,=\, p_2^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}\right) \cap \varphi^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}\right),$$

so dass diese beiden Mengen messbar sind. □

Definition 69.3. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und

$$f\colon\, M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann heißt

$$\int_M f\, d\mu \,:=\, \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S(f))$$

das *Integral* von f über M (zum Maß μ).

Diese Definition ist sowohl unmittelbar anschaulich als auch vom theoretischen Standpunkt her sehr schlagkräftig, da sie auf dem Maßbegriff beruht. Dagegen ist sie für Berechnungen direkt nicht geeignet, weshalb wir im Folgenden entsprechende Rechentechniken entwickeln werden. Diese Definition lässt die Möglichkeit zu, dass die Funktion den Wert ∞ annimmt, und dass das Integral diesen Wert annimmt. Im Fall von numerischen Funktion, die auch negative Werte annehmen können, führt man den Integralbegriff auf die Integrale der positiven und negativen Teilfunktion zurück. Dies ergibt aber nur dann Sinn, wenn beide Teilintegrale endlich sind.

[1]Für diese Argumentation setzt man $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$ und ansonsten $\infty - x = \infty$ u.s.w. Man kann auch die messbaren Mengen $f^{-1}(\infty) \times \{\infty\}$ und $f^{-1}(-\infty) \times \{-\infty\}$ aus dem Graphen bzw. Subgraphen herausnehmen und nur $\mathbb{R}$-wertige Funktionen betrachten.

Definition 69.4. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann heißt f *integrierbar*, wenn die beiden Integrale $\int_M f_+ \, d\mu$ und $\int_M f_- \, d\mu$ endlich sind. In diesem Fall nennt man

$$\int_M f \, d\mu = \int_M f_+ \, d\mu - \int_M f_- \, d\mu$$

das *Integral* von f.

Mit dieser Situation ergibt sich der leicht paradoxe Sprachgebrauch, dass eine nichtnegative Funktion stets ein Integral besitzt, dass aber, wenn dieses Integral unendlich ist, die Funktion nicht integrierbar ist. Die Integrierbarkeit ist, abgesehen von der vorausgesetzten Messbarkeit, die aber nahezu immer erfüllt ist, in erster Linie ein Endlichkeitsbegriff. In diese Richtung weist auch das folgende Lemma.

Lemma 69.5. *Es sei* $(M, \mathcal{A}, \mu)$ *ein* σ*-endlicher Maßraum und*

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(1) f *ist integrierbar.*
(2) *Der positive und der negative Teil von* f *sind integrierbar.*
(3) *Die Betragsfunktion* $|f|$ *ist integrierbar.*
(4) *Es gibt eine integrierbare messbare Funktion*

$$h\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit $|f(x)| \leq h(x)$ *für alle* $x \in M$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist die Definition von integrierbar. Für die Äquivalenz von (2) und (3) verwendet man die Beziehung $|f| = f_+ + f_-$. Dabei ist der Subgraph von $|f|$ die Vereinigung der beiden Subgraphen zu f_+ bzw. f_-, wobei der Durchschnitt dieser Subgraphen aus der Menge $\{(x,0) | \, f(x) = 0\}$ besteht und somit nach Aufgabe 69.4 das Maß 0 besitzt. Also ist[2]

$$\begin{aligned} \int_M |f| \, d\mu &= \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S(f)) \\ &= \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S(f_+)) + \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S(f_-)) \\ &= \int_M f_+ \, d\mu + \int_M f_- \, d\mu, \end{aligned}$$

und die beiden Summanden sind genau dann endlich, wenn die Summe endlich ist. Aus (3) folgt (4), indem man $h = |f|$ nimmt. Wenn (4) erfüllt ist, so

[2]Wir werden später sehen, dass generell das Integral mit der Addition von Funktionen verträglich ist, das haben wir hier aber noch nicht zur Verfügung.

ist der Subgraph von $|f|$ im Subgraphem von h enthalten, und die Monotonie des Maßes ergibt die Endlichkeit von $\int_M |f| \, d\mu$. $\square$

Für eine messbare Teilmenge $T \subseteq M$ setzt man

$$\int_T f \, d\mu \, := \, \int_T (f|_T) \, d\mu,$$

d.h. man schaut sich die auf den Teilmaßraum eingeschränkte Funktion an. Man könnte genauso gut die Funktion f durch diejenige Funktion $\tilde{f}$ ersetzen, die auf T mit f übereinstimmt und die außerhalb davon gleich 0 ist. Wenn man die Indikatorfunktion e_T zu einer messbaren Teilmenge $T \subseteq M$ heranzieht, so ergibt sich

$$\int_M e_T \, d\mu \, = \, \int_T 1 \, d\mu \, = \, \mu(T).$$

Diese Beschreibung des Maßes als ein Integral kann durchaus nützlich sein.

Man kann den Subgraphen als

$$S(f) \, = \, S^o(f) \uplus \Gamma(f)$$

schreiben, wobei $\Gamma(f) = \left\{ (x,y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} | \, y = f(x) \right\}$ der Graph ist und

$$S^o(f) \, = \, \left\{ (x,y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} | \, y < f(x) \right\}$$

gesetzt wird. Das folgende Lemma zeigt, dass der Graph eine Nullmenge ist und dass man somit den Subgraphen durch dieses $S^o(f)$ ersetzen kann. Dies ist für einige Ausschöpfungseigenschaften von Vorteil.

Lemma 69.6. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und*

$$f \colon \, M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann ist der Graph $\Gamma(f)$ eine Nullmenge in $M \times \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Die Mengen $f^{-1}(\infty) \times \{\infty\}$ und $f^{-1}(-\infty) \times \{-\infty\}$, die beide Teilmengen des Graphen sind, sind Nullmengen in $M \times \overline{\mathbb{R}}$. Man kann also annehmen, dass von vornherein eine messbare Funktion

$$f \colon \, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

vorliegt. Ferner können wir annehmen, dass μ ein endliches Maß ist, da zu einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $\mu(M_n) < \infty$ auch $M_n \times \mathbb{R}$ eine Ausschöpfung von $M \times \mathbb{R}$ ist. Wenn der Durchschnitt des Graphen mit allen $M_n \times \mathbb{R}$ das Maß 0 hat, so auch der Gesamtgraph. Nehmen wir nun an, dass $(\mu \otimes \lambda^1) \, (\Gamma(f)) > 0$ ist. Es ist

$$\Gamma(f) \, = \, \biguplus_{n \in \mathbb{Z}} \left(\Gamma(f) \cap (M \times [n, n+1[) \right)$$

eine disjunkte abzählbare Vereinigung, so dass mindestens einer dieser „Streifen“ ein positives Maß haben muss. Wir können M durch $f^{-1}([n, n+1[)$

ersetzen und daher annehmen, dass das Bild von f in $[n, n+1]$ liegt. Wir betrachten die abzählbar unendlich vielen Verschiebungen

$$\Gamma(f) + q \text{ mit } q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\,.$$

Diese sind paarweise disjunkt und sie liegen alle in $M \times [n, n+2]$. Wegen der Translationsinvarianz von λ^1 ist auch für jedes q die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R},\ (x,t) \longmapsto (x, t+q),$$

maßtreu (man betrachte die Quader, die das Produktmaß festlegen, siehe Aufgabe 69.12), und daher besitzt jede Verschiebung des Graphen das gleiche Maß wie der Graph selbst. Aus

$$\begin{aligned}
\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \left(\mu \otimes \lambda^1\right)\left(\Gamma(f) + q\right) &= (\mu \otimes \lambda^1)\left(\biguplus_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (\Gamma(f) + q) \right) \\
&\leq (\mu \otimes \lambda^1)(M \times [n, n+2]) \\
&= \mu(M) \cdot 2 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

ergibt sich ein Widerspruch. $\square$

Die Tschebyschow-Abschätzung

Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow (1821-1894)

Die folgende Aussage nennt man *Tschebyschow-Abschätzung* oder *Tschebyschow-Ungleichung*.

Lemma 69.7. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und*

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann gilt für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Abschätzung

$$\int_M f\, d\mu \,\geq\, a \cdot \mu \left\{ x \in M |\, f(x) \geq a \right\}.$$

Beweis. Es sei $T = \{x \in M |\, f(x) \geq a\}$. Dann ist

$$T \times [0, a] \,\subseteq\, S(f),$$

also

$$a \cdot \mu(T) \,=\, (\mu \otimes \lambda^1)(T \times [0, a]) \,\leq\, (\mu \otimes \lambda^1)(S(f)) \,=\, \int_M f\, d\mu.$$

$\square$

Bildmaße und allgemeine Transformationsformel

Satz 69.8. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $(N, \mathcal{B})$ ein Messraum und*

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei ν das Bildmaß von μ unter φ, das ebenfalls als σ-endlich vorausgesetzt sei, und es sei

$$f\colon N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine ν-integrierbare Funktion. Dann ist auch $f \circ \varphi$ μ-integrierbar, und es gilt

$$\int_N f\, d\nu \,=\, \int_M (f \circ \varphi)\, d\mu.$$

Beweis. Für nichtnegatives f ergibt sich dies unter Verwendung von Aufgabe 69.1 und Aufgabe 65.1 aus

$$\begin{aligned}
\int_N f\, d\nu &= \left(\nu \otimes \lambda^1\right)(S(f)) \\
&= \left(\mu \otimes \lambda^1\right)\left((\varphi \times \mathrm{id})^{-1}(S(f))\right) \\
&= \left(\mu \otimes \lambda^1\right)(S(f \circ \varphi)) \\
&= \int_M (f \circ \varphi)\, d\mu.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch der allgemeine Fall. $\square$

Bemerkung 69.9. Wenn $M = [c, d]$ und $N = [a, b]$ und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare bijektive streng wachsende Funktion ist, so gilt für eine stetige Funktion

$$f\colon N \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_c^d f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\, ds.$$

Um eine mit der allgemeinen Transformationsformel vergleichbare Substitutionsformel zu haben, muss man auf M die Funktion $g = f \circ \varphi$ und auf N die Funktion $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ betrachten und erhält

$$\int_c^d f(\varphi(s))ds = \int_a^b f(\varphi(\varphi^{-1}(t))) \cdot (\varphi^{-1})'(t)dt = \int_a^b f(t)\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}dt.$$

Links steht das Integral $\int_M f \circ \varphi d\lambda^1$, also muss rechts das Integral $\int_N f d\varphi_* \lambda^1$ stehen. Somit wird das Bildmaß $\varphi_* \lambda^1$ durch die Dichte $\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$ bezüglich λ^1 gegeben.