Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2014/2015

Analysis III

Arbeitsblatt 68

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 68.1. Wir definieren auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Topologie, indem wir die Mengen

$$]a,b[\text{ (mit } a,b \in \mathbb{R}), \ [-\infty, a[\text{ (mit } a \in \mathbb{R}) \text{ und }]a,\infty] \text{ (mit } a \in \mathbb{R})$$

als Basis der Topologie nehmen. Zeige, dass $\mathbb{R}$ offen in dieser Topologie ist und die Unterraumtopologie zu dieser Topologie trägt.

AUFGABE 68.2. Zeige, dass die Borelmengen auf $\overline{\mathbb{R}}$ zu der in Aufgabe 68.1 eingeführten Topologie mit den in der Vorlesung direkt eingeführten Borel-Mengen übereinstimmen.

AUFGABE 68.3. Zeige, dass $\overline{\mathbb{R}}$ mit der in Aufgabe 68.1 eingeführten Topologie homöomorph zum abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ ist.

AUFGABE 68.4. Bestimme das Supremum und das Infimum der Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

AUFGABE 68.5. Beschreibe eine beliebige einfache Funktion mit Hilfe von Indikatorfunktionen.

AUFGABE 68.6. Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder einfach ist.

AUFGABE 68.7.*

Es sei M ein Messraum und $f\colon M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

Aufgabe 68.8.*

Es sei X ein Messraum und es sei

$$f_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von messbaren Funktionen, wobei $\mathbb{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen trägt. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \in X \mid a \text{ ist ein Häufungspunkt der Folge } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}$$

eine messbare Teilmenge von X ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 68.9. (2 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es seien

$$f, g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

messbar ist.

Aufgabe 68.10. (2 Punkte)

Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei σ-einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder σ-einfach ist.

Eine Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Aufgabe 68.11. (5 Punkte)

Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) f ist messbar.
(2) Die Einschränkung von f auf das Intervall $[0, L[$ ist messbar.
(3) Die Einschränkung von f auf jedes Intervall der Form $[a, a + L[$ ist messbar.

b) Zeige, dass diese Äquivalenz für die Stetigkeit nicht gelten muss.

Aufgabe 68.12. (5 Punkte)

Bestimme die approximierenden Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_5$ für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

gemäß dem Beweis zu Lemma 68.11.

Aufgabe 68.13. (7 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei die Funktion f_n durch

$$f_n(x) \;=\; \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$$

definiert.

a) Zeige, dass die f_n σ-einfach sind.

b) Zeige, dass die Funktionenfolge f_n, $n \in \mathbb{N}$, punktweise gegen f konvergiert.

c) Zeige, dass diese Funktionenfolge nicht wachsend sein muss.

d) Sind die f_n messbar?