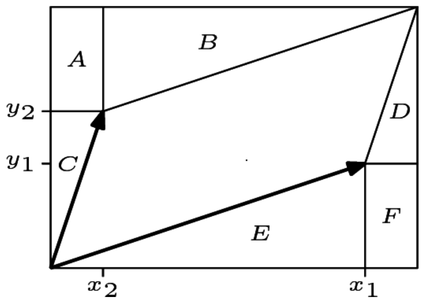
**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2014/2015**

# Analysis III

## Arbeitsblatt 67

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 67.1. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ die Determinante der durch die Vektoren definierten $2 \times 2$-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.




Aufgabe 67.2. Es seien $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ und $P_3 = (a_3, b_3)$ drei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ dar.

Aufgabe 67.3.*

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 67.4.*
Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 67.5. Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich $-1$ ist.
(Tipp: Betrachte $L^{tr} \circ L$).

Aufgabe 67.6. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass $\varphi$ volumentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 67.7. Es sei

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung und $c \in \mathbb{R}$. Zeige die Gleichheit $L_*(c\lambda^n) = c(L_*\lambda^n)$.

Aufgabe 67.8. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein linearer Endomorphismus, der nicht bijektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß $\varphi_*\lambda^n$ nicht $\sigma$-endlich ist.

Aufgabe 67.9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine positive reelle Zahl $\kappa_n$ gibt derart, dass das $n$-dimensionale Volumen einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^n$ mit Radius $r$ und mit einem beliebigen Mittelpunkt gleich $\kappa_n r^n$ ist.

Aufgabe 67.10. Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$(1,3,5) \text{ und } (-2,4,1)$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 67.11.*

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$v = (2, 3, -4) \text{ und } w = (1, -1, 7)$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 67.12.*

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 67.13. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$(2, 1, 3, 4), (4, 0, -1, 3) \text{ und } (5, -2, -2, 0)$$

im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 67.14. (5 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 3)$ erzeugten „Pseudoparallelogramms“, also von

$$S = \{a(0,1) + b(2,0) + c(1,3) | \, a, b, c \in [0,1]\} \, .$$

Aufgabe 67.15. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung, die surjektiv, aber nicht injektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^n$ für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ durch

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda^m(T) = 0 \, , \\ \infty, & \text{falls } \lambda^m(T) > 0 \, , \end{cases}$$

bestimmt ist.

Aufgabe 67.16. (5 Punkte)

Sei
$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2+y^2+z^2 = 1 \right\}$$
die Oberfläche der Einheitskugel. Zeige, dass das Volumen dieser Oberfläche 0 ist.

Aufgabe 67.17. (5 Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$. Zeige, dass die Multiplikationsabbildung
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto uz,$$
flächentreu ist.

(Dabei ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß versehen).