Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 65

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 65.1. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume, es seien $(N_1, \mathcal{B}_1)$ und $(N_2, \mathcal{B}_2)$ zwei Messräume und es seien

$$\varphi_1 \colon M_1 \longrightarrow N_1$$

und

$$\varphi_2 \colon M_2 \longrightarrow N_2$$

zwei messbare Abbildungen, unter denen die Bildmaße $(\varphi_1)_* \mu_1$ und $(\varphi_2)_* \mu_2$ σ-endlich seien. Zeige, dass für das Bildmaß unter der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ die Gleichung

$$\varphi_*(\mu_1 \otimes \mu_2) = ((\varphi_1)_* \mu_1) \otimes ((\varphi_2)_* \mu_2)$$

gilt.

Aufgabe 65.2. Wir betrachten die beiden Rechtecke

$$Q = [-1, 2] \times [1, 4] \text{ und } L = [1, 5] \times [3, 6]$$

im $\mathbb{R}^2$. Schreibe den Durchschnitt und die Differenzmengen als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Schreibe die Vereinigung der beiden Mengen auf mehrere Arten als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Welche Darstellung ist eine Verfeinerung einer anderen Darstellung? Wie sieht ein „Raster“ aus, mit dem man alle beteiligten Mengen ausdrücken kann? Bestätige, dass die Summe der beteiligten Rechteckinhalte stets gleich ist.

Aufgabe 65.3. Zeige, dass das durch die drei Punkte $(0, 0), (0, 1)$ und $(1, 0)$ gegebene abgeschlossene Dreieck nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgabe 65.4.*

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ und abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ besteht.

Aufgabe 65.5.*

Es seien M und N zwei abzählbare Mengen, die beide mit der σ-Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt μ bzw. ν) versehen seien.

a) Zeige, dass M und N σ-endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $M \times N$ ebenfalls das Zählmaß ist.

Aufgabe 65.6.*

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B\,(0,1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \right\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $[a,b] \times [c,d] \subseteq B\,(0,1)$ (mit $a \leq b$ und $c \leq d$) überdecken lässt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 65.7. (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}\,(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}\,(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgabe 65.8. (4 Punkte)

Es sei T die Vereinigung der drei Quader

$$Q_1 = [2,7] \times [1,3],\ Q_2 = [1,4] \times [2,5] \text{ und } Q_3 = [3,6] \times [4,6]$$

im $\mathbb{R}^2$. Bestimme

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R} |\ (x,y) \in T\}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ und

$$T^a = \{x \in \mathbb{R} |\ \lambda(T(x)) = a\}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ (dabei ist λ einfach die Summe der Länge der disjunkten Intervalle, aus denen sich $T(x)$ zusammensetzt).

Einen Maßraum mit dem Gesamtmaß 1 nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das folgende Konzept enorm wichtig.

Es sei $(M, \mathcal{E}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt zwei σ-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ *unabhängig*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jedes $B \in \mathcal{B}$ die Gleichheit

$$\mu(A \cap B) \,=\, \mu(A) \cdot \mu(B)$$

gilt.

AUFGABE 65.9. (4 Punkte)

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ ihr Produktraum. Zeige, dass die „Zylinderalgebren“

$$\mathcal{Z}_1 = \{S \times \Omega_2 | \, S \in \mathcal{A}_1\} \text{ und } \mathcal{Z}_2 = \{\Omega_1 \times T | \, T \in \mathcal{A}_2\}$$

unabhängig sind.

Aufgabe zum Hochladen

AUFGABE 65.10. (8 Punkte)

Man schreibe eine Animation, die die Unabhängigkeit des Maßes von der Quaderzerlegung im Beweis zu Lemma 65.3 (1) am Beispiel des $\mathbb{R}^2$ deutlich macht. Insbesondere soll die Einführung eines Rasters und der Begriff der Verfeinerung sichtbar werden.