Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 61

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 61.1. Von welchen ebenen Figuren und räumlichen Gebilden kennen Sie den Flächeninhalt bzw. das Volumen?

Aufgabe 61.2. Was ist das Volumen (der Inhalt, das Maß) eines einzelnen Punktes im $\mathbb{R}^0$, im $\mathbb{R}^1$, im $\mathbb{R}^2$ u.s.w.?

Aufgabe 61.3. Sei M eine Menge und $\mathcal{C}$ das Mengensystem auf M, das aus allen endlichen Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Zeige, dass $\mathcal{C}$ eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 61.4. Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ als Addition ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 61.5. Sei M eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Mengensystem auf M. Zeige, dass $\mathcal{R}$ genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn es ein Unterring des Potenzmengenringes $(\mathfrak{P}(M), \triangle, \cap)$ ist.

Aufgabe 61.6. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge M. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.
(2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $T \setminus S$ zu $\mathcal{A}$.
(3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch

$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}\,.$$

AUFGABE 61.7. Sei M eine Menge und sei $\mathcal{A}_j$, $j \in J$, eine beliebige Familie von σ-Algebren auf M. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

ebenfalls eine σ-Algebra auf M ist.

AUFGABE 61.8. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass das Mengensystem

$$N \cap T, \, T \in \mathcal{A}\,,$$

eine σ-Algebra auf N ist (man spricht von der *induzierten* σ-Algebra).

AUFGABE 61.9. Es seien

$$A_k = \{x \in [0,1[| \text{ die } k-\text{te Nachkommastelle von } x \text{ in der Dezimalentwicklung ist } 0\}\,.$$

Bestimme den limes inferior und den limes superior von dieser Mengenfolge.

AUFGABE 61.10. Sei M eine Menge und $\mathcal{A}$ ein Mengensystem auf M. Zeige, dass $\mathcal{A}$ genau dann ein durchschnittsstabiles Dynkin-System ist, wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

AUFGABE 61.11. Es sei $\mathcal{A}$ das Mengensystem auf $\mathbb{N}$, das aus allen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}$ besteht, die durch einen mathematischen Ausdruck beschreibbar sind. Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra, aber keine σ-Algebra ist.

AUFGABE 61.12. Zeige, dass messbare Abbildungen zwischen Messräumen die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.
(2) Jede konstante Abbildung ist messbar.
(3) Die Identität ist messbar.
(4) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Algebren auf einer Menge M. Dann ist die Identität auf M genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ gilt.

AUFGABE 61.13. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $\mathbb{Z}$ mit der ganzen Potenzmenge als σ-Algebra versehen. Sei $T \subseteq M$. Zeige, dass T genau dann messbar ist, wenn die Indikatorfunktion

$$e_T \colon M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

messbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 61.14. (3 Punkte)

Sei M eine Menge und $\mathcal{A}$ das Mengensystem auf M, das aus allen abzählbaren Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 61.15. (4 Punkte)

Sei M eine n-elementige Menge und sei k ein Teiler von n. Zeige, dass die Menge der Teilmengen von M, deren Elementanzahl ein Vielfaches von k ist, ein Dynkin-System bilden, das bei $k \neq 1, n$ keine Mengen-Algebra ist.

Aufgabe 61.16. (4 Punkte)

Es seien M und N Mengen und es sei

$$F\colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf M. Zeige, dass das Mengensystem

$$\left\{T \subseteq N \mid F^{-1}(T) \in \mathcal{A}\right\}$$

eine σ-Algebra auf N ist.

b) Sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf N. Zeige, dass das Mengensystem

$$\left\{F^{-1}(T) \mid T \in \mathcal{B}\right\}$$

eine σ-Algebra auf M ist.

Aufgabe 61.17. (4 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Zerlegung von M in abzählbar viele messbare Teilmengen. Es sei

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung in einen weiteren Messraum $(N, \mathcal{B})$. Zeige, dass φ genau dann messbar ist, wenn sämtliche Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{M_i}\colon M_i \longrightarrow N$$

messbar sind.

Aufgabe 61.18. (5 Punkte)

Es seien $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ und $P_3 = (a_3, b_3)$ drei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ dar.