

Analysis I**Arbeitsblatt 6****Übungsaufgaben**

AUFGABE 6.1. Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K . Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

AUFGABE 6.2. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 6.1.

Für die folgende Aufgabe brauchen wir den Begriff der Polynomfunktion.

Es sei K ein Körper und seien $a_0, a_1, \dots, a_d \in K$. Eine Funktion

$$P: K \longrightarrow K, x \longmapsto P(x),$$

mit

$$P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$$

heißt *Polynomfunktion*.

AUFGABE 6.3. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x . Zeige durch Induktion über d , dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

AUFGABE 6.4.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in \mathbb{Q} konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ gilt.

AUFGABE 6.6.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen in K . Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a . Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

AUFGABE 6.7. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in \mathbb{Q} , die (in \mathbb{Q}) nicht konvergiert.

AUFGABE 6.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

AUFGABE 6.9. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen \sqrt{a} konvergiert.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

AUFGABE 6.10. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in \mathbb{Q} , der kein Intervall ist.

Zeige, dass in \mathbb{R} jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Die folgende Aufgabe setzt Kenntnisse in linearer Algebra voraus.

AUFGABE 6.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0\}$$

ein K -Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V ?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6.12. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x . Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n + 1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

AUFGABE 6.13. (3 Punkte)

Zeige, dass die beiden im Wikipediaartikel „Dedekindscher Schnitt“ in der aktuellen Version (Version vom 4.10.2013 https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Dedekindscher_Schnitt&oldid=123123410) angegebenen Definitionen nicht wie dort behauptet zueinander äquivalent sind. Man gebe jeweils Beispiele an, die die eine, aber nicht die andere Definition erfüllen.

AUFGABE 6.14. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^e b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e , ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 6.15. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und sei $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ ein Polynom mit $d \geq 1$ und $a_d \neq 0$. Zeige, dass dann die durch

$$y_n := P(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

definierte Folge bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, falls $a_d > 0$ ist, und bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, falls $a_d < 0$ ist.

Man folgere, dass die Folgenglieder

$$\frac{1}{y_n}$$

für n hinreichend groß definiert sind und gegen 0 konvergieren.

AUFGABE 6.16. (4 Punkte)

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in \mathbb{R} konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x .

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.