Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 58

Übungsaufgaben

Die Himmelsscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

Aufgabe 58.1. Betrachte zu $r, s \in \mathbb{R}_+$ mit $r + s > 1$ und $s < r + 1$ die „sichelförmige" Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\} .$$

Für welche r, s ist diese Menge sternförmig?

Aufgabe 58.2. Zeige, dass das Vektorfeld

$$G \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x - y \cos x \, , - \sin x \,) \, ,$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von G.

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

Aufgabe 58.3. Es sei

$$G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass G genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn $\operatorname{rot}(G) = 0$ ist.

Aufgabe 58.4. Berechne zum Vektorfeld

$$G\colon \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(x^3 - z^2,\ \frac{xy}{z},\ \frac{z}{x^2y}\right)$$

die Rotation.

Aufgabe 58.5.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z,\ xe^{xy} - 2yz,\ \frac{x}{z} - y^2\right).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 58.6. (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(ye^z - 3x^2z,\ xe^z + 2yz,\ xye^z + y^2 - x^3\right),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Aufgabe 58.7. (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G\colon \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0,\ z > 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{e^{3x} - z}{y},\ \frac{\cos x}{z^2},\ \frac{\ln z}{xy}\right)$$

die Rotation.

Aufgabe 58.8. (5 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass U genau dann zusammenhängend ist, wenn man je zwei Punkte $P, Q \in U$ durch einen stetig differenzierbaren Weg verbinden kann.

Tipp: Man denke an den Beweis von Lemma 35.13.