Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 56

Übungsaufgaben

Aufgabe 56.1. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven

$$g\colon I \longrightarrow V,$$

wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

Aufgabe 56.2. Sei

$$f\colon I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t, P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

Aufgabe 56.3.*

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 56.4. Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$.

Aufgabe 56.5. Bestimme in Beispiel 56.4 eine explizite Formel für die Iterationen φ_n.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 56.6. (6 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine in $P \in G$ total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung U von P mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$ gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

Aufgabe 56.7. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 56.8. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t,v) \text{ und } v(1) = (3,2,6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (t,x,y,z) &\longmapsto t^3(3,1,4) - e^{-2t}(2,-1,7) + (t - t^2e^t)(0,4,5) + (2,2,2). \end{aligned}$$

Aufgabe 56.9. (4 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ und $y(0) = 1$.

Aufgabe 56.10. (4 Punkte)

Sei T eine Menge und

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Folge von Abbildungen. Zeige, dass f_n genau dann gegen eine Grenzabbildung

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

gleichmäßig konvergiert, wenn die Komponentenfunktionen $(f_i)_n$ gleichmäßig gegen f_i konvergieren.