Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 54

Übungsaufgaben

Aufgabe 54.1. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K und es seien $L, L_1, \ldots, L_m$ Linearformen auf V. Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{kern} L_i \subseteq \operatorname{kern} L$$

genau dann gilt, wenn L zu dem von den $L_1, \ldots, L_m$ erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

Aufgabe 54.2. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = 5x + 3y$$

auf der Ellipse

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Man löse die folgende Aufgabe direkt und als eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen.

Aufgabe 54.3. Für welche Punkte (t, t^2) der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt $(0, 1)$ minimal?

Aufgabe 54.4. Bestimme sämtliche Tangenten an die Hyperbel

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \right\}.$$

Aufgabe 54.5. Zeige, dass durch

$$[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(\cos^3 t\,,\ \sin^3 t \right),$$

eine bijektive Parametrisierung der Standardastroide

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 + y^2 - 1 \right)^3 + 27x^2y^2 = 0 \right\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 54.6. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x,y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x^2+y^2-1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}.$$

Aufgabe 54.7. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x,y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x^2+y^2-1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}$$

unter Verwendung der durch $(x,y) = \left(\cos^3 t\,,\ \sin^3 t\right)$ gegebenen Parametrisierung (siehe Aufgabe 54.5) von M.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 54.8. (4 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x,y,z) = 3x+4y+2z$$

auf dem Ellipsoid

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 2x^2+y^2+3z^2 = 4\right\}.$$

Aufgabe 54.9. (4 Punkte)

Bestimme sämtliche Tangenten an die Astroide

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \left(x^2+y^2-1\right)^3 + 27x^2y^2 = 0\right\}.$$

Aufgabe 54.10. (6 (1+2+3) Punkte)

Wir betrachten im Einheitswürfel $E = [-1,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ eingeschriebene Vierecke mit den Eckpunkten $(-1 \leq a,b \leq 1)$

$$(1,a,-1),\ (b,1,-1),\ (-1,-a,1),\ (-b,-1,1).$$

(1) Zeige, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
(2) Unter welcher Bedingung an a,b handelt es sich um ein Quadrat?
(3) Für welche a,b erhält man ein Quadrat mit maximalem Flächeninhalt?

AUFGABE 54.11. (6 Punkte)

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen derart, dass die Nullfasern

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} |\, f(x, y) = 0\} \text{ und } N = \{(x, y) \in \mathbb{R} |\, g(x, y) = 0\}$$

disjunkt sind und beide nur reguläre Punkte besitzen. Es sei

$$(P, Q) \in M \times N \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

ein Punktepaar, für das der Abstand zwischen solchen Punkten minimal wird. Zeige, dass die zugehörigen Tangenten parallel sind.