Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 48

Übungsaufgaben

Aufgabe 48.1. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $\langle -,-\rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$\langle v_i, v_j\rangle = \langle v_j, v_i\rangle$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gibt.

Aufgabe 48.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,-\rangle$ auf V. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i, u_i\rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $\langle -,-\rangle$ positiv definit ist.

Aufgabe 48.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 48.4. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,-\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
(2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bezüglich einer Basis ist invertierbar.
(3) Die Bilinearform ist vom Typ $(p, n-p)$ (mit einem $p \in \{1, \ldots, n\}$.)

Aufgabe 48.5. Es sei $\langle -,-\rangle$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ $(n-q, q)$ auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -,-\rangle$ bezüglich dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von $\det G$ gleich $(-1)^q$ ist.

Aufgabe 48.6. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 48.7. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 48.8. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von f in jedem Punkt $P \in G$ symmetrisch ist.

Aufgabe 48.9. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^3 - xy + y^2,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 48.10. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y - xy^2 + x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 48.11. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k-fach stetig differenzierbare Funktion, $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$. Es sei

$$h(t) := f(P + tv).$$

Zeige, dass h k-fach stetig differenzierbar ist und dass

$$h^{(k)}(0) = D_v \cdots D_v f(P)$$

(mit k Richtungsableitungen) gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.12. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,- \rangle$ auf V und einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von V derart, dass $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, aber $\langle -,- \rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 48.13. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48.14. (5 Punkte)

Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y, z) \longmapsto xy^3 - x^2 \ln z,$$

im Punkt $(0, 2, 3)$.

Aufgabe 48.15. (5 Punkte)

Es sei

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt. Die Hesse-Matrix in P besitze sowohl positive als auch negative Eigenwerte. Zeige, dass f in P kein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 48.16. (4 Punkte)

Bestimme die globalen Extrema für die Funktion

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gegebene abgeschlossene (volle) Dreieck ist.

Aufgabe 48.17. (6 Punkte)

Bestimme die Hesse-Matrizen zu den kritischen Punkten zur Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 46.9.