

**Analysis II****Arbeitsblatt 47****Übungsaufgaben**

AUFGABE 47.1. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum von endlicher Dimension. Zeige, dass der Dualraum  $V^*$  die gleiche Dimension wie  $V$  besitzt.

AUFGABE 47.2. Betrachte die Linearform

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei  $\varphi = L|_E$  die Einschränkung von  $L$  auf  $E$ . Bestimme den Vektor  $w \in E$  mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$  bezeichnet.

AUFGABE 47.3. Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

AUFGABE 47.4. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

AUFGABE 47.5. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz},$$

in jedem Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 47.6. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt  $P \in G$  mit  $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

AUFGABE 47.7. Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass  $f$  und  $(Df)_P$  im Punkt  $P$  den gleichen Gradienten besitzen.

AUFGABE 47.8. Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor  $v \in V$  genau dann zum Kern von  $(Df)_P$  gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten  $\text{grad } f(P)$  ist.

AUFGABE 47.9. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

AUFGABE 47.10. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

AUFGABE 47.11. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 47.12. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt  $P = (1, 1)$  in Richtung des Winkels  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

## AUFGABE 47.13. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + \sin(y) - xz.$$

(1) Bestimme den Gradienten  $G$  von  $f$  im Punkt  $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  bezüglich des Standardskalarprodukts  $\langle -, - \rangle$ .

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei  $g = f|_E$  die Einschränkung von  $f$  auf  $E$ . Bestimme den Gradienten  $\tilde{G}$  von  $g$  bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$ .

(3) Zeige, dass  $\tilde{G}$  die orthogonale Projektion von  $G$  auf  $E$  ist.

## AUFGABE 47.14. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

## AUFGABE 47.15. (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 46.9.