

Analysis II**Arbeitsblatt 44****Übungsaufgaben**

AUFGABE 44.1. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y).$$

AUFGABE 44.2. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2yz^3 - \sin x, \exp(x^4y) - 2x^2z^3 \cos(xy^2z)).$$

AUFGABE 44.3. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

AUFGABE 44.4.*

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x^2 + y^4}, \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, \ln(x^2 + y^2) \right)$$

in jedem Punkt.

AUFGABE 44.5. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ ausdrücken lassen.

AUFGABE 44.6. Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix. Ebenso für z^3, z^4, z^5 .

AUFGABE 44.7. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

AUFGABE 44.8. Es seien V und W endlichdimensionale, \mathbb{K} -Vektorräume $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine n -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei v_1, \dots, v_n eine Auswahl von n Vektoren aus V . Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 44.9. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, x^2y^3z^4 - y \sinh z, xy^2z + 5).$$

AUFGABE 44.10. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x, y) in Richtung $(2, 5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2, 5)$ anwendet.

AUFGABE 44.11. (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

AUFGABE 44.12. (4 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass sämtliche k -ten Richtungsableitungen 0 sind.

AUFGABE 44.13. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass

$$\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$$

gilt.

AUFGABE 44.14. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$$

gilt.