

Analysis II**Arbeitsblatt 43****Übungsaufgaben**

AUFGABE 43.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy,$$

- (1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 5)$,
- (3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (4) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (5) im Punkt $(2, 3)$ in Richtung $(-1, 0)$,
- (6) im Punkt $(3, 7)$ in Richtung $(5, -4)$.

AUFGABE 43.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

- (1) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(1, 3)$ in Richtung $(2, 4)$,
- (4) im Punkt $(-1, 6)$ in Richtung $(-3, -1)$,
- (5) im Punkt $(1, \frac{1}{100})$ in Richtung $(0, -1)$.

AUFGABE 43.3.*

Bestimme zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

AUFGABE 43.4. Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

AUFGABE 43.5. Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

AUFGABE 43.6. Seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f: G \rightarrow W$ eine Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass f in P in Richtung v genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um $0 \in \mathbb{K}$ definierte) Kurve

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Gleichheit

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall gewählt werden?

AUFGABE 43.7. Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

existieren.

AUFGABE 43.8. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

existiert.

AUFGABE 43.9. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto |x + y|,$$

existiert.

AUFGABE 43.10. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 43.11. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

- (1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 0)$,
- (4) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, -3)$,
- (5) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 1)$,
- (6) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(-1, \frac{1}{2})$,
- (7) im Punkt $(5, 7)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (8) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(5, 7)$.

AUFGABE 43.12. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

- (1) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
- (2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
- (4) im Punkt $(3, -2)$ in Richtung $(2, -5)$.

AUFGABE 43.13. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

AUFGABE 43.14. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 43.13, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $D_v \varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

AUFGABE 43.15. (3 Punkte)

Seien V und W endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und sei

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar sei. Zeige, dass f auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{K}$ differenzierbar ist und die Beziehung $(D_{cv}f)(P) = c(D_vf)(P)$ gilt.