Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegen.

Aufgabe 4.2. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ mit der durch $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, falls $ad \geq cb$ in $\mathbb{Z}$ gilt, definierten Beziehung ein angeordneter Körper ist (dabei dürfen nur Eigenschaften der Ordnung auf $\mathbb{Z}$ verwendet werden).

Aufgabe 4.3.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

Aufgabe 4.4.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 4.5. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass $-x < 0$ ist.

(Bemerkung: Diese Aussage kann man so verstehen, dass das Negative eines positiven Elementes negativ ist. Allerdings tritt dabei negativ in zwei verschiedenen Bedeutungen auf!)

Aufgabe 4.6. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes $x \in K$ die Beziehung $x^2 = xx \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4.7. Beweise die folgenden Aussagen:

In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.

(1) $1 > 0$,

(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$,
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.

Aufgabe 4.8. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y$. Zeige, dass dann $-x < -y$ ist.

Aufgabe 4.9. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

Aufgabe 4.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 4.11. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

Aufgabe 4.12. Zeige, dass der in Aufgabe 3.19 konstruierte Körper K nicht angeordnet werden kann.

Aufgabe 4.13. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die in Aufgabe 3.6 eingeführte Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K,\, n \longmapsto n_K,$$

injektiv ist.

Aufgabe 4.14. Zeige die Abschätzung

$$\binom{d+n}{n} \geq \left(\frac{d}{n}\right)^n .$$

Aufgabe 4.15. Zeige die Abschätzung

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 4.16. Zeige die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 4.17. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x < y$ Elemente in K. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 4.18. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a) $\left|\frac{x-2}{3x-1}\right| \leq 1$.

b) $|4x-3| < |2x-3|$.

Aufgabe 4.19. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

Aufgabe 4.20. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K,\ (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 4.21. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K,\ x \longmapsto |x|,$$

in einem angeordneten Körper(dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 4.22. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K \,|\, x \geq n \text{ und } x < n+1\},\ n \in \mathbb{Z},$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.23. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

(1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 4.24. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 4.13 konstruierte injektive Zuordnung $\mathbb{Z} \subset K$. Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung $\mathbb{Q} \subseteq K$ fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen in K übereinstimmen und die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ mit der Ordnung auf K übereinstimmt.

Aufgabe 4.25. (4 Punkte)

Betrachte die Menge

$$K = \left\{ q + p\sqrt{5} | \, p, q \in \mathbb{Q} \right\} ,$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist. Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird. Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird. Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Aufgabe 4.26. (2 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 4.27. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Elemente. Zeige, dass dann

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

gilt.