Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 36

Übungsaufgaben

Aufgabe 36.1. Es sei

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M, die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 36.2. Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

Aufgabe 36.3. Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion, die zugleich eine starke Kontraktion sei. Zeige, dass dann die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) - x,$$

streng fallend ist.

Aufgabe 36.4. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \leq c$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $c < 1$. Zeige, dass f eine starke Kontraktion ist.

Aufgabe 36.5. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0},\, x \longmapsto e^x - 1,$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, aber keine starke Kontraktion ist. Zeige ferner, dass zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 36.6. Zeige, dass der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ vollständig ist.

Aufgabe 36.7. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum M mit dem Grenzwert x. Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{x_n | \, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

(mit der induzierten Metrik) vollständig ist.

Aufgabe 36.8. Es sei M eine Menge und es sei

$$F\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von F mit der Diagonalen

$$\triangle = \{(x,x) \in M \times M | \, x \in M\}$$

nicht leer ist.

Aufgabe 36.9. Es sei

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 < || \, (x,y) \, || \leq 1\right\} .$$

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f\colon D \longrightarrow D,$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 36.10.*

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung in einen metrischen Raum M. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 36.11.*

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge, $n \geq 1$.

a) T sei nicht beschränkt. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Bild nicht beschränkt ist.

b) T sei nicht abgeschlossen. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Bild nicht beschränkt ist.

In der folgenden Aufgaben seien die Homomorphismenräume $\operatorname{Hom}(V,W)$ mit der Norm
$$\|\varphi\| := \sup\left(\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1\right)$$
versehen.

Aufgabe 36.12. Zeige, dass eine lineare Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$
zwischen zwei euklidischen Vektorräumen V und W genau dann stark kontrahierend ist, wenn $\|\varphi\| < 1$ ist.

Aufgabe 36.13. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und sei M ein vollständiger metrischer Raum. Sei C die Menge der stetigen Abbildungen von T nach M. Definiere eine Metrik auf C derart, dass C selbst zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

Aufgabe 36.14. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 36.15. (2 Punkte)

Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann vollständig ist, wenn T abgeschlossen ist.

Aufgabe 36.16. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion
$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$
die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 36.17. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x,$$
folgende Eigenschaften besitzt: Es ist
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|\ ,$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$, $x \neq y$, aber f ist nicht stark kontrahierend.

Aufgabe 36.18. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 36.19. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 36.20. (6 Punkte)

Man fertige eine Animation an, die den Banachschen Fixpunktsatz anhand eines „Karte in der Karte“-Modells illustriert.