Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 35

Übungsaufgaben

Aufgabe 35.1. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge in einem metrischen Raum M. Zeige

$$\overline{T} = \bigcap_{T \subseteq A \subseteq M,\, A \text{ abgeschlossen}} A.$$

Aufgabe 35.2. Bestimme den Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Aufgabe 35.3. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f \colon T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \ldots, f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von V. Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$$

existieren.

Aufgabe 35.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es seien $f \colon T \rightarrow \mathbb{K}$ und $g \colon T \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren. Zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist

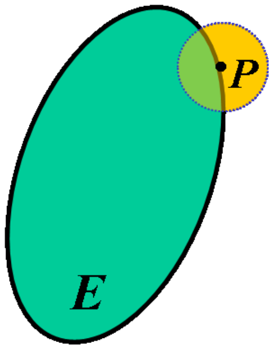
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) .$$

(2) Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) .$$

(3) Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$



Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Randpunkt* von T, wenn für jedes $\epsilon > 0$ der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus T als auch Punkte aus $M \setminus T$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte von T heißt *Rand* von T, geschrieben $\operatorname{Rand}(T)$.

Aufgabe 35.5. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T gleich dem Durchschnitt von $\overline{T}$ und $\overline{M \setminus T}$ ist.

Aufgabe 35.6. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.7. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \operatorname{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.8. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \operatorname{Rand}(T)$$

offen ist.

Aufgabe 35.9. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion $\operatorname{Rand}(T) \subseteq T$ gilt.

Aufgabe 35.10. Es sei I ein nichtleeres reelles Intervall und $x \in I$ ein Punkt. Bestimme die Teilmengen von $I \setminus \{x\}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Aufgabe 35.11.*

Beweise den Zwischenwertsatz mit Satz 35.8 und Satz 35.9.

Aufgabe 35.12. Zeige, dass der $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 35.13. Sei T eine offene (oder abgeschlossene) Kugel im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass T wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 35.14. Sei $n \geq 2$ und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 35.15. Zeige, dass ein reelles Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ wegzusammenhängend.

Aufgabe 35.16. Untersuche den Graph der durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

gegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Zusammenhangseigenschaften.

Aufgabe 35.17. Zeige, dass in $\mathbb{R}$ der nichtleere Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen wieder zusammenhängend ist. Muss dies auch für den nichtleeren Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$ gelten?

Aufgabe 35.18. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $M = A \cup B$ mit nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq M$ und $A \cap B = \emptyset$. Es gebe ein $\delta > 0$ mit

$$d(x, y) \geq \delta \text{ für alle } x \in A,\ y \in B\,.$$

Zeige, dass A (und auch B) sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 35.19. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von T genau dann leer ist, wenn T sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 35.20. (4 Punkte)

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Es sei T zusammenhängend. Zeige, dass auch der Abschluss $\overline{T}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 35.21. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine offene, nicht zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass der Abschluss von U zusammenhängend ist.

Aufgabe 35.22. (5 Punkte)

Bestimme den Abschluss der Menge $T = U(0,1) \cap \mathbb{Q}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 35.23. (4 Punkte)

Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \right\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M = (a, b)$ und dem *Radius* r. Es sei G eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M, P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.