Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 34

Übungsaufgaben

Aufgabe 34.1. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

Aufgabe 34.2. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M,\, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

Aufgabe 34.3. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq M$ stetig ist.

Aufgabe 34.4. Sei (M,d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien

$$f\colon [a,b] \longrightarrow M$$

und

$$g\colon [b,c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung

$$h\colon [a,c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 34.5. Sei (M,d) ein metrischer Raum und sei

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in M$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x gilt.

Aufgabe 34.6. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

AUFGABE 34.7. Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f \colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

AUFGABE 34.8. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto |z|\,,$$

stetig ist.

AUFGABE 34.9. Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto ||\, v\, ||,$$

eine stetige Abbildung ist.

AUFGABE 34.10. Zeige, dass die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

stetig ist.

AUFGABE 34.11. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass V abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist.

AUFGABE 34.12. Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

AUFGABE 34.13.*

Es seien L und M metrische Räume und es seien

$$f, g \colon L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L |\, f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in L ist.

AUFGABE 34.14. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$\varphi \colon [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,).$$

Zeige, dass φ eine Bijektion zwischen $[0, 2\pi[$ und dem Einheitskreis definiert, die stetig ist, deren Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

Aufgabe 34.15. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f\colon Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Aufgabe 34.16.*

Zeige, dass das offene Einheitsintervall $]0,1[$ und das abgschlossene Einheitsintervall $[0,1]$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 34.17. Es sei $I = [a,b[$ ein halboffenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

Aufgabe 34.18. Sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen z_i, $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass f auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

Aufgabe 34.19. Es sei

$$f\colon \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 34.20. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\, M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 34.21. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\, M \longmapsto M^{-1},$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.22. (5 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

Aufgabe 34.23. (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 3 cm und die Ecklöcher seien ein Viertelkreis[1] mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte des Lochrandes, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

a) (63.5, 63.5)

b) (100, 100)

c) (63.5, 192,5)

d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Aufgabe 34.24. (2 Punkte)

Man gebe eine Homöomorphie zwischen $]0,1[$ und $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe 34.25. (5 Punkte)

Es sei $I=]a,b[$ ein offenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

Aufgabe 34.26. (10 Punkte)

Es sei $I=[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

---

[1] Diese Aufgabe ergibt auch Sinn, wenn die Löcher volle Kreise um die Eckpunkte sind, hat aber ein anderes Ergebnis.