Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 29

Übungsaufgaben

Aufgabe 29.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}\,.$$

Aufgabe 29.2. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}\,.$$

Aufgabe 29.3. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y\,.$$

Aufgabe 29.4. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7\,.$$

Aufgabe 29.5. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\,.$$

Aufgabe 29.6. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 18.21, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 29.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

Aufgabe 29.8. Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 29.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2 - 1)$$

erfüllen.

Aufgabe 29.9.*

Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2(t-1)}$$

für $t > 1$.

Aufgabe 29.10.*

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Aufgabe 29.11.*

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3) \cos t$$

für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3) \cos t \text{ mit } y(0) = 7\,.$$

Aufgabe 29.12.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y.$$

b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y + t^2.$$

Aufgabe 29.13. Es sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.14. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 3}\,.$$

Aufgabe 29.15. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = (t+2)y + t \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right)\,.$$

Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(1) = \pi$?

Aufgabe 29.16. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2+2} y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 29.17. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1\,.$$

Aufgabe 29.18. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3 - 2t + 5}{t^2 - 3}\,.$$