Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Es seien L, M, N Mengen und $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe 2.2. Es seien L, M, N Mengen und $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe 2.3. Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgabe 2.4. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 2.5. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi\colon \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 2.6.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\, L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 2.7. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = 2x^2 - x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 2.8. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgabe 2.9. Sei M eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ und der Produktmenge $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$. Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn A und B zwar eine Vereinigung von M ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt?

Aufgabe 2.10. Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0,1\}) .$$

Aufgabe 2.11. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0,1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 2.12. Es sei

$$F \colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $T, T_1, T_2 \subseteq M$):

(1) $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$,
(2) $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$,
(3) $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$.

Aufgabe 2.13. Es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen

$$\mathfrak{P}(L) \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\, S \longmapsto F(S),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $S, S_1, S_2 \subseteq L$):

(1) $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$,
(2) $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$,
(3) $F(L \setminus S) \supseteq F(M) \setminus F(S)$.

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

Aufgabe 2.14. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 2.15. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

Aufgabe 2.16. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.17. (3 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen
$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$
für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch
$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$
definiert sind.

Aufgabe 2.18. (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.19. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und
$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$
Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung
$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$
Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 2.20. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung
$$\varphi\colon\ M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$
die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Aufgabe 2.21. (5 Punkte)

Es seien L und M Mengen. Wir betrachten die Abbildung
$$\Psi\colon\ \text{Abb}\,(L, M) \longrightarrow \text{Abb}\,(\mathfrak{P}\,(L), \mathfrak{P}\,(M))\,,\ f \longmapsto f^{-1},$$
bei der einer Abbildung das Urbildnehmen zugeordnet wird.

a) Zeige, dass Ψ injektiv ist.

b) Es sei $L \neq \emptyset$. Zeige, dass Ψ nicht surjektiv ist.