Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 18

Übungsaufgaben

Die folgende Aufgabe löse man direkt ohne Ableitungsregeln.

Aufgabe 18.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 18.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 18.4. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^q,$$

für jedes $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 18.5.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Aufgabe 18.7. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 18.8. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 18.9. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 18.10. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 18.11. Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 18.12. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 18.13.*

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 18.14. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|x|\,,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 18.15. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige, dass

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

Aufgabe 18.16. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt 0. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = z^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

Aufgabe 18.17.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z - w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d - 2$.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 18.18. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.19. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3-x+2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 18.20. (4 Punkte)

Bestimme, ob die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \overline{z},$$

differenzierbar ist oder nicht.

Aufgabe 18.21. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und seien

$$f_i\colon D \longrightarrow \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n \,.$$

Aufgabe 18.22. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 18.23. (4 Punkte)

Es sei

$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine (höhere) Ableitung mit $F^{(n)} = 0$ gibt.

Aufgabe 18.24. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.18 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?

(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Die Weihnachtsaufgabe

Aufgabe 18.25. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.18 entspricht. Unter einem *Zykel* von f der Länge n verstehen wir ein $x \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(x) = x$ (f^n bezeichnet die n-te Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst) und $f^i(x) \neq x$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Besitzt f Zykel der Länge $n \geq 2$?

(Diese Aufgabe ist gesondert abzugeben, die Deckelregel findet für sie keine Anwendung.)