Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 16

Übungsaufgaben

Aufgabe 16.1. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten auf einem reellen Intervall $[a, b]$ die Funktionenfolge

$$f_n \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto t x_n .$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, und bestimme die Grenzfunktion.

Aufgabe 16.2. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto t x_n .$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge punktweise, aber im Allgemeinen nicht gleichmäßig konvergiert. Was ist die Grenzfunktion?

Aufgabe 16.3.*

Sei T eine Menge und seien

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}, \, t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 16.4. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f_n(x),$$

die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ für } x \leq 0, \\ nx \text{ für } 0 < x \leq 1/n, \\ 2 - nx \text{ für } 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, \text{ für } x > 2/n \, . \end{cases}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionen stetig sind, und dass diese Funktionenfolge punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 16.5.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Aufgabe 16.6. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} | \ || f ||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass M ein komplexer Vektorraum ist.

Aufgabe 16.7. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die zugehörige Potenzreihe. Zeige, dass deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius der um $a \in \mathbb{C}$ „verschobenen" Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

übereinstimmt.

Aufgabe 16.8.*

Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

Aufgabe 16.9. Zeige, dass die Exponentialreihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 16.10. Es seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, deren Minimum r sei. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist konvergent auf $U(0, r)$ und stellt dort die Summenfunktion $f + g$ dar.

(2) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ mit $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ ist konvergent auf $U(0, r)$ und stellt dort die Produktfunktion fg dar.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.11. (4 Punkte)

Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n}.$$

Zeige, dass diese Folge für $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ punktweise konvergiert, und untersuche die Folge auf gleichmäßige Konvergenz für die verschiedenen Definitionsmengen

$$I = \mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{R}_+,\ [1, \infty],\ [\frac{1}{5}, 5],\ ]0, 1],\ [0, 1]\,.$$

Aufgabe 16.12. (4 Punkte)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Zeige, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt, und dass die Reihe noch für alle $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$, konvergiert.

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} |\ \| f \|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\| f \| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt

$$\| \lambda f \| = |\lambda| \cdot \| f \|\ .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\| g + f \| \leq \| g \| + \| f \|\ .$$

Aufgabe 16.14. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe, die für ein $\epsilon > 0$ auf $U(0, \epsilon)$ konvergiere und dort die Nullfunktion darstelle. Zeige, dass dann $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (d.h. die Potenzreihe ist die Nullreihe).

Aufgabe 16.15. (5 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ und sei für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ eine konvergente Folge

$$(c_{in})_{n \in \mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ gegeben, deren Limes mit c_i bezeichnet sei. Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen vom Grad $\leq d$, die durch

$$f_n := c_{dn} x^d + c_{d-1\,n} x^{d-1} + \cdots + c_{2n} x^2 + c_{1n} x + c_{0n}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionenfolge auf jeder kompakten Kreisscheibe $B(0, r)$ gleichmäßig gegen

$$f = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

konvergiert.