

Analysis I**Arbeitsblatt 15****Übungsaufgaben**

AUFGABE 15.1. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

AUFGABE 15.2. Es seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei absolut konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

AUFGABE 15.3. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von z) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}.$$

AUFGABE 15.4. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen z^0, z^1, z^2, z^3, z^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^3.$$

AUFGABE 15.5.*

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

AUFGABE 15.6. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp x,$$

nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.¹

AUFGABE 15.7.*

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

AUFGABE 15.8. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die durch die Reihenglieder

$$a_n := c_{2n} + c_{2n+1}$$

definierte Reihe ebenfalls und zwar gegen die gleiche Summe konvergiert.

AUFGABE 15.9. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^n a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

¹Aus der Stetigkeit, die wir aber noch nicht bewiesen haben, folgt daraus, dass \mathbb{R}_+ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

AUFGABE 15.10. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 15.11. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^4.$$

AUFGABE 15.12. (4 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$R_{N+1}(z) = \exp z - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(z)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |z|^{N+1}$$

gilt.

AUFGABE 15.13. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von $\exp 1$.

AUFGABE 15.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.²

²Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

4

AUFGABE 15.15. (3 Punkte)

Beweise das Additionstheorem für den Sinus, also die Gleichheit

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.