Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 14

Übungsaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

eine stetige, streng wachsende, bijektive Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$

gegeben wird, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 14.2. Zeige, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 14.3. Zeige, dass das Bild eines offenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht offen sein muss.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass das Bild eines beschränkten Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht beschränkt sein muss.

Aufgabe 14.5. Es sei I ein reelles Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, injektive Funktion. Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 14.6. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2. Zeige, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x < \sqrt{2}\,, \\ 1\,, & \text{falls } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.8. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f gibt.

Aufgabe 14.9. Man gebe ein Beispiel einer gleichmäßig stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

derart, dass keine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

existiert.

Aufgabe 14.10. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.11. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 14.12. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(2) Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.

Aufgabe 14.13. Sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die durch

$$\sqrt[k]{b} = b^{1/k}$$

definierte Folge gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 14.14. Führe die Details im Beweis zu Lemma 14.9 für den Fall $b < 1$ aus.

Aufgabe 14.15. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und es sei eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

und Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Unter der zugehörigen (stückweise) *linearen Interpolation* versteht man die Abbildung

$$g\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x),$$

die auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch die affin-lineare Funktion gegeben ist, deren Graph die Punkte (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) durch eine gerade Strecke verbindet.

Diese Konstruktion kommt insbesondere dann zum Zuge, wenn eine gegebene Funktion

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

approximiert werden soll, wobei die Unterteilung gegeben ist und man $y_i = f(x_i)$ nimmt.

Aufgabe 14.16. Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und es sei eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

und Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Beschreibe die zugehörige lineare Interpolation durch funktionale Ausdrücke und zeige, dass es sich um eine stetige Funktion handelt.

Aufgabe 14.17. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.

In den folgenden Aufgaben bedeutet $C^0(T, \mathbb{K})$ die Menge der stetigen Funktionen von T nach $\mathbb{K}$ (für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$) und $B\,(P, b)$ den abgeschlossenen Vollkreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt P und Radius b (die Randpunkte gehören also dazu).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.18. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{\mathbb{Q}},$$

eine stetige Funktion wird also auf ihre Einschränkung auf $\mathbb{Q}$ abgebildet. Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 14.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige unbeschränkte Funktion

$$f \colon [0,2[\longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass eine solche Funktion keine stetige Fortsetzung auf $[0, 2]$ besitzt.

Aufgabe 14.20. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}_+$ und

$$f \colon B\,(P, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f} \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

von f gibt.

Aufgabe 14.21. (6 Punkte)

Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und

$$f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

derart, dass die lineare Interpolation g (zu dieser Unterteilung und zu f) die Eigenschaft

$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b]$$

erfüllt.

(Bemerkung: Die vorstehende Aufgabe kann man so interpretieren, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn man mit einem beliebig dünnen (gemessen in vertikaler Richtung) Stift den Funktionsgraphen durch zusammenhängende (endlich viele, nicht vertikale) Geradenstücke übermalen kann.)