Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cup R$,
(3) $(N \cup P) \cap R$,
(4) $N \setminus R$,
(5) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(6) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(7) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.

Aufgabe 1.2. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.3. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

Aufgabe 1.4. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) |\, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) |\, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) |\, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) |\, |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,

(5) $\{(x,y) \mid 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x,y) \mid xy = 0\}$,
(7) $\{(x,y) \mid xy = 1\}$,
(8) $\{(x,y) \mid xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x,y) \mid 0 = 0\}$,
(10) $\{(x,y) \mid 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.5. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 1.6. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \, .$$

Aufgabe 1.7.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

Aufgabe 1.8. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 1.9. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.
Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Aufgabe 1.10. Zeige, dass für $n \geq 4$ die Beziehung

$$2^n \leq n!$$

gilt.

Aufgabe 1.11. Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Zeige, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2} n!$$

gilt.

Aufgabe 1.12.*
Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 1.13. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.14. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.15. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.16. (3 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 1.17. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.