Fachbereich Mathematik/Informatik **29. November 2014**
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis III

Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	6	5	3	3	9	5	10	5	6	4	64
erhalt. Pkt.:													

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Mengenalgebra* auf einer Menge M.
(2) Eine *Borelmenge* in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.
(3) Eine *messbare* Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

zwischen zwei Messräumen $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$.
(4) Eine *Ausschöpfung* einer Menge M.
(5) Ein *Maß* auf einem Messraum $(M, \mathcal{A})$ (ohne Bezug auf ein Prämaß).
(6) Ein *translationsinvariantes* Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
(7) Das *Lebesgue-Integral* zu einer messbaren nichtnegativen Funktion $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.
(8) Der *Limes inferior* zu einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Eindeutigkeitssatz für Maße.*
(2) Die *Formel* für $\lambda^n(L(S))$ für eine Borelmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ unter einer linearen Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
(3) Der *Satz von der majorisierten Konvergenz* (oder *Satz von Lebesgue*).
(4) Das *Cavalieri-Prinzip* für eine messbare Teilmenge $T \subseteq M \times N$ zu zwei σ-endlichen Maßräumen $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ und abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ besteht.

Aufgabe 4. (5 (2+3) Punkte)

Es seien M und N zwei abzählbare Mengen, die beide mit der σ-Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt μ bzw. ν) versehen seien.

a) Zeige, dass M und N σ-endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $M \times N$ ebenfalls das Zählmaß ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Es sei M ein Messraum und $f\colon M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f}\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

Aufgabe 7. (9 Punkte)

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B\,(0,1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \right\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $[a,b] \times [c,d] \subseteq B\,(0,1)$ (mit $a \leq b$ und $c \leq d$) überdecken lässt.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die t-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 9. (10 Punkte)

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha \,, f(x) \sin \alpha \,) |\, x \in [a,b],\, \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

das Volumen 0 besitzt.

AUFGABE 10. (5 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und A_t, $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{A_t}. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,x) \longmapsto f(t,x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 71.1 (siehe Anhang) sind erfüllt, welche nicht?

AUFGABE 11. (6 (2+2+2) Punkte)

a) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ addiert?

b) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ multiplizert?

c) Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ durch eine reelle Zahl aus $[c, d]$ $(c > 0)$ dividiert?

AUFGABE 12. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1, 3] \times [0, 2]$ unter der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x^3, y - x^2).$$

Anhang

Satz 1. *Es sei* $(M, \mathcal{A}, \mu)$ *ein* σ*-endlicher Maßraum,* E *ein metrischer Raum,* $t_0 \in E$ *und*

$$f\colon\ E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ (t,x) \longmapsto f(t,x),$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

(1) *Für alle* $t \in E$ *ist die Funktion* $x \mapsto f(t,x)$ *messbar.*
(2) *Für alle* $x \in M$ *ist die Funktion* $t \mapsto f(t,x)$ *stetig in* t_0*.*
(3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h\colon\ M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit

$$|f(t,x)| \,\leq\, h(x)$$

für alle $t \in E$ *und alle* $x \in M$*.*

Dann ist die Funktion

$$\varphi\colon\ E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

wohldefiniert und stetig in t_0*.*