Analysis I

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2013/2014

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 9
1. Vorlesung - Mengen, Induktion 10
1.1. Mengen 10
1.2. Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen 11
1.3. Mengenoperationen 12
1.4. Konstruktion von Mengen 13
1.5. Induktion 15
1. Arbeitsblatt 17
1.1. Übungsaufgaben 17
1.2. Aufgaben zum Abgeben 20
2. Vorlesung -Abbildungen 21
2.1. Abbildungen 21
2.2. Injektive und surjektive Abbildungen 23
2.3. Hintereinanderschaltung von Abbildungen 24
2.4. Graph, Bild und Urbild einer Abbildung 25
2.5. Verknüpfungen 26
2. Arbeitsblatt 28
2.1. Übungsaufgaben 28
2.2. Aufgaben zum Abgeben 31
3. Vorlesung - Körper 32
3.1. Körper 32
3.2. Die rationalen Zahlen 35
3.3. Die Binomialkoeffizienten 37
3. Arbeitsblatt 40
3.1. Übungsaufgaben 40
3.2. Aufgaben zum Abgeben 43
4. Vorlesung - Anordnung 44
4.1. Angeordnete Körper 44
4.2. Der Betrag 46
4.3. Bernoulli'sche Ungleichung 47
4.4. Archimedisch angeordnete Körper 48

4. Arbeitsblatt 50
4.1. Übungsaufgaben 50
4.2. Aufgaben zum Abgeben 53
5. Vorlesung - Folgen 55
5.1. Folgen in einem angeordneten Körper 55
5.2. Beschränktheit 59
5. Arbeitsblatt 61
5.1. Übungsaufgaben 61
5.2. Aufgaben zum Abgeben 65
6. Vorlesung - Cauchy-Folgen 66
6.1. Rechenregeln für Folgen 66
6.2. Cauchy-Folgen 68
6.3. Der Körper der reellen Zahlen 70
6. Arbeitsblatt 70
6.1. Übungsaufgaben 70
6.2. Aufgaben zum Abgeben 72
7. Vorlesung - Vollständigkeit 74
7.1. Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen 74
7.2. Der Satz von Bolzano-Weierstraß 77
7.3. Die eulersche Zahl e 78
7. Arbeitsblatt 80
7.1. Übungsaufgaben 80
7.2. Aufgaben zum Abgeben 83
8. Vorlesung - Komplexe Zahlen 83
8.1. Die komplexen Zahlen 83
8.2. Folgen von komplexen Zahlen 88
8.3. Quadratwurzeln von komplexen Zahlen 89
8. Arbeitsblatt 90
8.1. Übungsaufgaben 90
8.2. Aufgaben zum Abgeben 93
8.3. Kollektivaufgabe 94
9. Vorlesung - Reihen 94
9.1. Reihen 94

9.2. Absolute Konvergenz 98
9.3. Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium 99
9. Arbeitsblatt 102
9.1. Aufgaben zum Abgeben 104
10. Vorlesung - Abzählbarkeit 105
10.1. Mächtigkeiten 105
10.2. Endliche Mengen 107
10.3. Abzählbare Mengen 108
10.4. Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen 111
10. Arbeitsblatt 113
10.1. Übungsaufgaben 113
10.2. Aufgaben zum Abgeben 114
11. Vorlesung - Polynome 114
11.1. Der Polynomring über einem Körper 115
11.2. Division mit Rest 116
11.3. Nullstellen 118
11.4. Rationale Funktionen 119
11. Arbeitsblatt 120
11.1. Übungsaufgaben 120
11.2. Aufgaben zum Abgeben 123
12. Vorlesung - Stetigkeit 124
12.1. Stetige Funktionen 124
12.2. Rechenregeln für stetige Funktionen 127
12.3. Grenzwerte von Funktionen 129
12. Arbeitsblatt 131
12.1. Übungsaufgaben 131
12.2. Aufgaben zum Abgeben 134
13. Vorlesung - Zwischenwertsatz 135
13.1. Der Zwischenwertsatz 135
13.2. Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion 137
13.3. Stetigkeit der Wurzeln 138
13.4. Minima und Maxima 139
13. Arbeitsblatt 140

13.1. Übungsaufgaben 140
13.2. Aufgaben zum Abgeben 142
14. Vorlesung - Gleichmäßig stetig 143
14.1. Gleichmäßige Stetigkeit 143
14.2. Fortsetzung von stetigen Funktionen 144
14.3. Reelle Exponentialfunktionen 146
14. Arbeitsblatt 148
14.1. Übungsaufgaben 148
14.2. Aufgaben zum Abgeben 151
15. Vorlesung - Potenzreihen 152
15.1. Cauchy-Produkt von Reihen 152
15.2. Potenzreihen 153
15.3. Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion 153
15.4. Die trigonometrischen Reihen 156
15. Arbeitsblatt 158
15.1. Übungsaufgaben 158
15.2. Aufgaben zum Abgeben 160
16. Vorlesung - Funktionenfolgen 161
16.1. Funktionenfolgen 161
16.2. Das Konvergenzkriterium von Weierstraß 163
16.3. Konvergenz von Potenzreihen 164
16.4. Der Identitätssatz für Potenzreihen 166
16. Arbeitsblatt 167
16.1. Übungsaufgaben 167
16.2. Aufgaben zum Abgeben 169
17. Vorlesung - Entwicklungssatz 170
17.1. Logarithmen 170
17.2. Summierbarkeit 172
17.3. Der große Umordnungssatz 174
17.4. Der Entwicklungssatz für Potenzreihen 175
17. Arbeitsblatt 176
17.1. Übungsaufgaben 176
17.2. Aufgaben zum Abgeben 178

18. Vorlesung - Differenzierbarkeit 179
18.1. Differenzierbare Funktionen 179
18.2. Lineare Approximierbarkeit 181
18.3. Ableitungsregeln 182
18.4. Höhere Ableitungen 186
18. Arbeitsblatt 187
18.1. Übungsaufgaben 187
18.2. Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie 189
18.3. Aufgaben zum Abgeben 190
18.4. Die Weihnachtsaufgabe 191
19. Vorlesung - Mittelwertsatz 191
19.1. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung 192
19.2. Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital 194
19. Arbeitsblatt 196
19.1. Übungsaufgaben 196
19.2. Aufgaben zum Abgeben 199
20. Vorlesung - Potenzreihen-Ableitung 200
20.1. Konvexe Funktionen 200
20.2. Ableitung von Potenzreihen 203
20. Arbeitsblatt 206
20.1. Übungsaufgaben 206
20.2. Aufgaben zum Abgeben 209
21. Vorlesung - π 210
21.1. Die Zahl π 210
21.2. Polarkoordinaten für $\mathbb{C}$ 212
21.3. Wurzeln aus komplexen Zahlen 214
21. Arbeitsblatt 216
21.1. Übungsaufgaben 216
21.2. Aufgaben zum Abgeben 219
22. Vorlesung - Taylor-Entwicklung 220
22.1. Die Taylor-Formel 221
22.2. Anwendung auf Extrema 224
22.3. Die Taylor-Reihe 225

22. Arbeitsblatt 226
22.1. Übungsaufgaben 226
22.2. Aufgaben zum Abgeben 229
23. Vorlesung - Integrierbarkeit 230
23.1. Treppenfunktionen 231
23.2. Riemann-integrierbare Funktionen 233
23.3. Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen 236
23. Arbeitsblatt 238
23.1. Übungsaufgaben 238
23.2. Aufgaben zum Abgeben 241
24. Vorlesung - Hauptsatz 242
24.1. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 242
24.2. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 243
24.3. Stammfunktion 244
24.4. Stammfunktionen zu Potenzreihen 249
24. Arbeitsblatt 250
24.1. Übungsaufgaben 250
24.2. Aufgaben zum Abgeben 253
25. Vorlesung - Integrationsregeln 254
25.1. Partielle Integration 254
25.2. Integration der Umkehrfunktion 257
25.3. Die Substitutionsregel 258
25. Arbeitsblatt 261
25.1. Übungsaufgaben 261
25.2. Aufgaben zum Abgeben 264
26. Vorlesung -Partialbruchzerlegung 265
26.1. Partialbruchzerlegung 269
26.2. Integration rationaler Funktionen 272
26. Arbeitsblatt 273
26.1. Übungsaufgaben 273
26.2. Aufgaben zum Abgeben 276
27. Vorlesung - Weitere Stammfunktionen 276

27.1. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in der Exponentialfunktion 276
27.2. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in trigonometrischen Funktionen 278
27.3. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in Wurzelfunktionen 280
27. Arbeitsblatt 284
27.1. Übungsaufgaben 284
27.2. Aufgaben zum Abgeben 286
28. Vorlesung - Differentialgleichungen 286
28.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen 286
28.2. Ortsunabhängige Differentialgleichungen 289
28.3. Zeitunabhängige Differentialgleichungen 290
28.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung 291
28. Arbeitsblatt 293
28.1. Übungsaufgaben 293
28.2. Aufgaben zum Abgeben 296
29. Vorlesung - Lineare Differentialgleichungen 297
29.1. Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 297
29.2. Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 299
29. Arbeitsblatt 303
29.1. Übungsaufgaben 303
29.2. Aufgaben zum Abgeben 305
30. Vorlesung - Getrennte Variablen 306
30.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen 306
30. Arbeitsblatt 312
30.1. Übungsaufgaben 312
30.2. Aufgaben zum Abgeben 314
Anhang A: Bildlizenzen 315
Abbildungsverzeichnis 315

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Analysis I wieder, die ich im Wintersemester 2013/2014 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um ausformulierte Manuskripttexte. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichten.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 3.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 3.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

Bei Daniel Brinkmann, Ines Melzer und Johannes Stemeseder bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs, Korrekturen und Vorlesungsvertretungen. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen.

Holger Brenner

1. Vorlesung - Mengen, Induktion

1.1. **Mengen.**

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M\,.$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für

ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

1.2. **Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen.**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. Bei endlichen Mengen ist dies unproblematisch, bei unendlichen Mengen muss man ein „Bildungsgesetz“ für die Elemente angeben.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} .$$

Hier wird eine bestimmte Zahlenmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wichtig ist, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M | \, E(x)\} = \{x \in M | \, x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} .$$

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x(x \in N \to x \in M)$.

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist gerade}\} ,$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist ungerade}\} ,$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist eine Quadratzahl}\} ,$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist eine Primzahl}\} .$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K |\, x \text{ kommt aus Osnabrück}\} ,$$

$$P = \{x \in K |\, x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\} ,$$

$$D = \{x \in K |\, x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\} .$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x |\, x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} .$$

1.3. **Mengenoperationen.**

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen enstehen.

- *Vereinigung*
$$A \cup B := \{x |\, x \in A \text{ oder } x \in B\} ,$$
- *Durchschnitt*
$$A \cap B := \{x |\, x \in A \text{ und } x \in B\} ,$$
- *Differenzmenge*
$$A \setminus B := \{x |\, x \in A \text{ und } x \notin B\} .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen.

Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A := G \setminus A = \{x \in G | \, x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

1.4. **Konstruktion von Mengen.**

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie beispielsweise den endlichen Mengen und $\mathbb{N}$ durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.[2] Wir definieren[3]

Definition 1.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) | \, x \in L, \, y \in M\}$$

die *Produktmenge*[4] der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

---

[2]Darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

[3]Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Name (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Name wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt

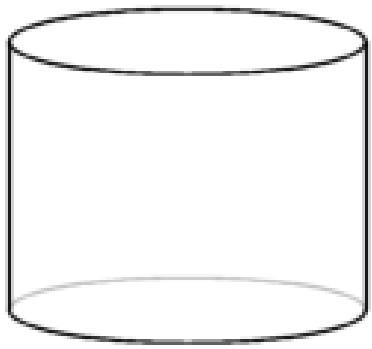
[4]Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen

Beispiel 1.2. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

die Menge aller Namen. Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Wenn zwei geometrische Punktmengen A und B gegeben sind, beispielsweise als Teilmengen einer Ebene E, so kann man die Produktmenge $A \times B$ als Teilmenge von $E \times E$ auffassen. Dadurch entsteht ein neues geometrisches Gebilde, das man manchmal auch in einer kleineren Dimension realisieren kann.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke

Beispiel 1.3. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge einer Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subseteq E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

Definition 1.4. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}(M)$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathfrak{P}(M) = \{T | \, T \text{ ist Teilmenge von } M\} \, .$$

Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

1.5. **Induktion.**

Mathematische Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* bewiesen werden. Die folgende Aussage begründet dieses Prinzip.

Satz 1.5. *Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(1) *$A(0)$ ist wahr.*
(2) *Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beweis. Es sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} | \, A(n) \text{ ist wahr}\} \, .$$

Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist

$$0 \in M \, .$$

Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M, dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit enthält M die 0, daher die 1, daher die 2, usw., und damit überhaupt alle natürlichen Zahlen. □

Der Nachweis von (der Gültigkeit von) $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschluss*. Innerhalb des Induktionsschlusses nennt man die Gültigkeit von $A(n)$ auch die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschluss führt man für $n \geq n_0$ durch.

Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das Summenzeichen. Für gegebene (natürliche, reelle, kompexe) Zahlen a_1, $\ldots, a_n$ bedeutet

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \; := \; a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Dabei hängen im Allgemeinen die a_k in einer formelhaften Weise von k ab. Entsprechend ist das Produktzeichen definiert, nämlich durch

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Insbesondere sind für $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen durch

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$$

definiert. Dabei gelten die Konventionen $0a = 0$ und $a^0 = 1$ (die erste lässt sich auch über die Multiplikation begründen, die zweite ist aber auch sinnvoll). Als Rechenregeln für das Potenzieren gelten

(1)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

(2)
$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

(3)
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Aufgabe 1.6. Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

Aufgabe 1.7. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 \;=\; 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

1. Arbeitsblatt

1.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 1.1. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cup R$,
(3) $(N \cup P) \cap R$,
(4) $N \setminus R$,
(5) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(6) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(7) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.

Aufgabe 1.2. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,

(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.3. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.

Aufgabe 1.4. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y)|\, x = 5\}$,
(2) $\{(x,y)|\, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x,y)|\, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x,y)|\, |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x,y)|\, 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x,y)|\, xy = 0\}$,
(7) $\{(x,y)|\, xy = 1\}$,
(8) $\{(x,y)|\, xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x,y)|\, 0 = 0\}$,
(10) $\{(x,y)|\, 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

Aufgabe 1.5. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Eine Kreislinie K.
(2) Ein Geradenstück I.
(3) Eine Gerade G.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 1.6. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 1.7.*
Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 1.8. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 1.9. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung
$$2^n \geq n^2$$
gilt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.
Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl
$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$
die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Aufgabe 1.10. Zeige, dass für $n \geq 4$ die Beziehung
$$2^n \leq n!$$
gilt.

Aufgabe 1.11. Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv durch
$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2$$
definiert. Zeige, dass für $n \geq 2$
$$a_n = \frac{1}{2} n!$$
gilt.

Aufgabe 1.12.*

Zeige mittels vollständiger Induktion für $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} \text{ bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 1.13. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

1.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 1.14. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.15. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.16. (3 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 1.17. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

2. Vorlesung -Abbildungen

2.1. **Abbildungen.**

Definition 2.1. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F\colon\ L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F\colon\ L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen $F\colon L_1 \to M_1$ und $G\colon L_2 \to M_2$ sind gleich, wenn die Definitionsmengen und die Wertemengen übereinstimmen und wenn für alle $x \in L_1 = L_2$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in $M_1 = M_2$ gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Zu zwei Mengen L und M bezeichnet man die *Menge der Abbildungen* von L nach M mit

$$\text{Abb}\ (L, M) = \{f : L \to M |\, f\ \text{Abbildung}\}\ .$$

Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge ein Zahlbereich wie die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

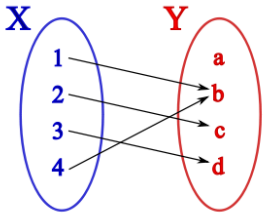
$$L \longrightarrow L,\ x \longmapsto x,$$

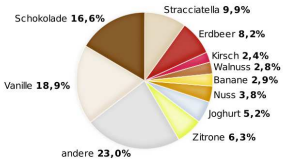
also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

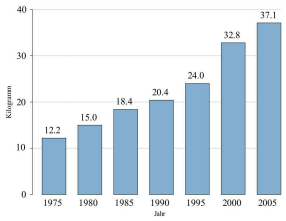
$$L \longrightarrow M,\ x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[5]

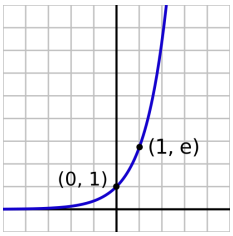
Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.



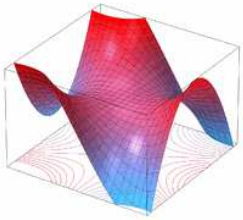


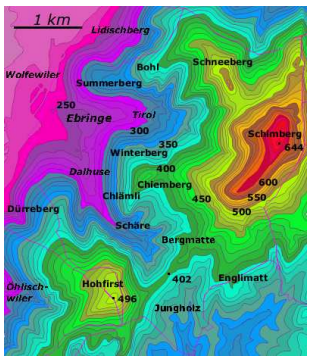


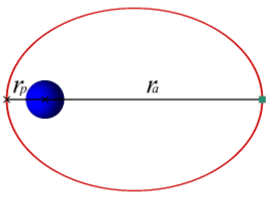
x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1



$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1







[5]Von Hilbert stammt die etwas überraschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.

2.2. **Injektive und surjektive Abbildungen.**

Definition 2.2. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

• *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

• *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.

• *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Beispiel 2.3. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, da die zwei verschiedenen Zahlen 2 und -2 beide auf 4 abgebildet werden. Sie ist nicht surjektiv, da nur nichtnegative Elemente erreicht werden (eine negative Zahl hat keine reelle Quadratwurzel). Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Injektivität folgt beispielsweise so: Wenn $x^2 = y^2$ ist mit $x, y \geq 0$, so ist entweder $x = y = 0$ oder $(x/y)^2 = 1$, also $x/y = 1$ und daher $x = y$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

ist nicht injektiv, aber surjektiv, da jede nichtnegative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv und surjektiv.

Definition 2.4. Es sei $F\colon\, L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G\colon\, M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

2.3. **Hintereinanderschaltung von Abbildungen.**

Definition 2.5. Es seien L, M und N Mengen und

$$F\colon\, L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G\colon\, M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung[6]

$$G \circ F\colon\, L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)\,(x) \,:=\, G(F(x)),$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Lemma 2.6. *Es seien L, M, N und P Mengen und es seien*

$$F\colon\, L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

$$G\colon\, M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H\colon\, N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

[6]Man beachte, dass in der Bezeichnung die „verkehrte“ Reihenfolge verwendet wird, da ja F zuerst ausgeführt wird. Dies beruht darauf, dass das Argument rechts geschrieben wird.

Beweis. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta\colon L \to P$ sind genau dann gleich, wenn für jedes $x \in L$ die Gleichheit $\alpha(x) = \beta(x)$ gilt. Sei also $x \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(x) &= H((G \circ F)(x)) \\ &= H(G(F(x))) \\ &= (H \circ G)(F(x)) \\ &= ((H \circ G) \circ F)(x).\end{aligned}$$

□

2.4. **Graph, Bild und Urbild einer Abbildung.**

Definition 2.7. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$\Gamma_F = \{(x, F(x)) |\, x \in L\} \subseteq L \times M$$

den *Graphen* der Abbildung F.

Definition 2.8. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt

$$F(S) = \{y \in M |\, \text{es gibt ein } x \in S \text{ mit } F(x) = y\}$$

das *Bild von* S unter F. Für $S = L$ heißt

$$F(L) = \text{Bild}\,(F)$$

das *Bild der Abbildung*.

Definition 2.9. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt

$$F^{-1}(T) = \{x \in L |\, F(x) \in T\}$$

das *Urbild von* T unter F. Für eine einelementige Teilmenge $T = \{y\}$ heißt

$$F^{-1}(\{y\})$$

das *Urbild von* y.

2.5. **Verknüpfungen.**

Definition 2.10. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto \circ(x,y) = x \circ y.$$

Eine Verknüpfung macht also aus einem Paar

$$(x,y) \in M \times M$$

ein einziges Element

$$x \circ y \in M\,.$$

Eine Vielzahl von mathematischen Konstruktionen fällt unter diesen Begriff: Die Addition, die Differenz, die Multiplikation, die Division von Zahlen, die Verknüpfung von Abbildungen, der Durchschnitt oder die Vereinigung von Mengen, etc. Als Verknüpfungssymbol kommt eine ganze Reihe in Frage, z.B. $\circ, \cdot, +, -, \oplus, \clubsuit, \heartsuit$ u.s.w.

Wichtige strukturelle Eigenschaften einer Verknüpfung werden in den folgenden Definitionen aufgelistet.

Definition 2.11. Eine Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *kommutativ*, wenn für alle $x, y \in M$ die Gleichheit

$$x \circ y = y \circ x$$

gilt.

Definition 2.12. Eine Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y,$$

auf einer Menge M heißt *assoziativ*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die Gleichheit

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

gilt.

Definition 2.13. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y,$$

gegeben. Dann heißt ein Element $e \in M$ *neutrales Element* der Verknüpfung, wenn für alle $x \in M$ die Gleichheit

$$x \circ e = x = e \circ x$$

gilt.

Im kommutativen Fall muss man natürlich für das neutrale Element nur eine Reihenfolge betrachten.

Definition 2.14. Es sei eine Menge M mit einer Verknüpfung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto x \circ y,$$

und einem neutralen Element $e \in M$ gegeben. Dann heißt zu einem Element $x \in M$ ein Element $y \in M$ *inverses Element*, wenn die Gleichheit

$$x \circ y \ = \ e \ = \ y \circ x$$

gilt.

Beispiel 2.15. Es sei L eine Menge und

$$M \ = \ \text{Abb}\ (L,L)$$

die Menge aller Abbildungen von L in sich. Durch die Hintereinanderschaltung von Abbildungen liegt eine Verknüpfung auf M vor, die aufgrund von Lemma 2.6 assoziativ ist. Dagegen ist sie nicht kommutativ. Die Identität auf L ist das neutrale Element. Eine Abbildung $f\colon\ L \to L$ besitzt genau dann ein inverses Element, wenn sie bijektiv ist; das inverse Element ist einfach die Umkehrabbildung.

Beginnend mit der nächsten Vorlesung beschäftigen wir uns mit den reellen Zahlen, bei denen es die Addition und die Multiplikation als Verknüpfungen gibt. Erstaunlicherweise erfüllen diese beiden Verknüpfungen (bei der Multiplikation muss man die Multiplikation herausnehmen) für sich genommen eine wichtige algebraische Struktur: Es handelt sich um Gruppen.

Definition 2.16. Eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$ und mit einer Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto g \circ h,$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für alle $f,g,h \in G$ gilt

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\,.$$

(2) Das Element e ist ein *neutrales Element*, d.h. für alle $g \in G$ gilt

$$g \circ e = g = e \circ g\,.$$

(3) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *inverses Element*, d.h. es gibt ein $h \in G$ mit

$$h \circ g = g \circ h = e\,.$$

Solch abstrakte Strukturen führen ein Doppelleben: Einerseits sind sie wirklich nur die gegebene formale Struktur, die Elemente sind nur irgendwelche Elemente einer irgendwie gegebenen Menge, die Verknüpfung ist irgendeine Verknüpfung, unter der man sich nichts Bestimmtes vorstellen soll. Die gewählten Symbole sind willkürlich und ohne Bedeutung. Andererseits erhalten solche abstakte Strukturen dadurch ihr Leben, dass konkrete mathematische Strukturen darunter subsummiert werden können. Die konkreten

Strukturen sind *Beispiele* oder *Modelle* für die abstrakte Struktur (und sie sind mathematikhistorisch auch die Motivation, abstraktere Strukturen einzuführen). Beide Ebenen sind wichtig, man sollte sie aber stets auseinander halten.

2. Arbeitsblatt

2.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 2.1. Es seien L, M, N Mengen und $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe 2.2. Es seien L, M, N Mengen und $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe 2.3. Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgabe 2.4. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 2.5. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi\colon \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 2.6.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 2.7. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = 2x^2 - x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 2.8. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgabe 2.9. Sei M eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ und der Produktmenge $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$. Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn A und B zwar eine Vereinigung von M ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt?

Aufgabe 2.10. Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0,1\}) .$$

Aufgabe 2.11. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0,1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 2.12. Es sei

$$F \colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $T, T_1, T_2 \subseteq M$):

(1) $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$,
(2) $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$,
(3) $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$.

Aufgabe 2.13. Es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen

$$\mathfrak{P}\,(L) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(M),\ S \longmapsto F(S),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $S, S_1, S_2 \subseteq L$):

(1) $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$,
(2) $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$,
(3) $F(L \setminus S) \supseteq F(M) \setminus F(S)$.

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

Aufgabe 2.14. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}\,(M) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 2.15. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon\ L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}\,(M) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

Aufgabe 2.16. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

2.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 2.17. (3 Punkte)
Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 2.18. (3 Punkte)
Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.19. (3 Punkte)
Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.
Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 2.20. (3 Punkte)
Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Aufgabe 2.21. (5 Punkte)

Es seien L und M Mengen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon\ \mathrm{Abb}\,(L,M) \longrightarrow \mathrm{Abb}\,(\mathfrak{P}\,(L),\mathfrak{P}\,(M))\,,\ f \longmapsto f^{-1},$$

bei der einer Abbildung das Urbildnehmen zugeordnet wird.

a) Zeige, dass Ψ injektiv ist.

b) Es sei $L \neq \emptyset$. Zeige, dass Ψ nicht surjektiv ist.

3. Vorlesung - Körper

3.1. **Körper.**

Wir werden nun die Eigenschaften der reellen Zahlen besprechen. Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukuren werden als *Axiome* bezeichnet. In der Mathematik werden sämtliche Eigenschaften aus den Axiomen logisch abgeleitet. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei reellen Zahlen eine weitere reelle Zahl zu, es handelt sich also um Verknüpfungen.

Definition 3.1. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
   (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
   (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

(2) Axiome der Multiplikation
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
   (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
   (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.

(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule bekannt. Unter Verwendung des Gruppenbegriffs kann man auch sagen, dass ein Körper eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und zwei fixierten Elementen $0 \neq 1$ ist, derart, dass $(K, +, 0)$ und $K \setminus \{0\}, \cdot, 1$ jeweils kommutative Gruppen sind und dass das Distributivgesetz gilt. Daher gelten für die Addition und die Multiplikation häufig strukturell ähnliche Eigenschaften. Da wir in dieser Vorlesung die Gruppentheorie nicht systematisch entwickeln werden, ist das nur eine Nebenbemerkung.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen, die wir später kennenlernen werden.

Lemma 3.2. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei x vorgegeben und seien y und y' Elemente mit $x+y = 0 = x+y'$. Dann gilt

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y'.$$

Insgesamt ist also $y = y'$. Für den zweiten Teil sei x vorgegeben mit $x \neq 0$. Es seien z und z' Elemente mit $xz = 1 = xz'$. Dann ist

$$z = z1 = z(xz') = (zx)z' = 1z' = z'.$$

Also ist $z = z'$. □

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element y mit $a + y = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem eindeutig bestimmten Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element z mit $az = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.

Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Ein „kurioser“ Körper wird im folgenden Beispiel beschrieben. Dieser Körper mit zwei Elementen ist in der Informatik und der Kodierungstheorie wichtig, wird für uns aber keine große Rolle spielen. Er zeigt, dass es nicht für jeden Körper sinnvoll ist, seine Elemente auf der Zahlengeraden zu verorten.

Beispiel 3.3. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element einer Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bezüglich der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper nach Lemma 3.4 (1) $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Die folgenden Eigenschaften sind für den Körper der reellen Zahlen vertraut, wir beweisen sie aber allein aus den Axiomen eines Körpers. Sie gelten daher für einen jeden Körper.

Lemma 3.4. *Es sei K ein Körper und seien $a, b, c, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ Elemente aus K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) $a0 = 0$ *(*Annullationsregel*).*
(2) $(-a)b = -ab = a(-b)$.
(3) $(-a)(-b) = ab$ *(*Vorzeichenregel*).*
(4) $a(b - c) = ab - ac$.
(5) $(\sum_{i=1}^{r} a_i)(\sum_{k=1}^{s} b_k) = \sum_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*
(6) *Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. (1) Es ist $a0 = a(0+0) = a0+a0$. Durch beidseitiges Abziehen von $a0$ ergibt sich die Behauptung.

(2)
$$(-a)b + ab \;=\; (-a+a)b \;=\; 0b \;=\; 0$$
nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab. Die zweite Gleichheit folgt analog.

(3) Nach (2) ist $(-(-a))b = (-a)(-b)$ und wegen $-(-a) = a$ folgt die Behauptung.

(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.

(5) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 3.17.

(6) Nehmen wir an, dass a und b beide von 0 verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach der Annullationsregel
$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) \;=\; 0(b^{-1}a^{-1}) \;=\; 0,$$
so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt.

□

3.2. **Die rationalen Zahlen.**

Wir geben eine Definition der rationalen Zahlen allein unter Bezug auf die ganzen Zahlen.

Definition 3.5. Unter einer *rationalen Zahl* versteht man einen Ausdruck der Form
$$\frac{a}{b}\,,$$
wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ sind, und wobei zwei Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn $ad = bc$ (in $\mathbb{Z}$) gilt. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Bei $\frac{a}{b}$ heißt a der *Zähler* und b der *Nenner* der rationalen Zahl. Für die rationale Zahl $\frac{a}{1}$ schreibt man einfach a. In diesem Sinne sind ganze Zahlen insbesondere auch rationale Zahlen. Es gelten die folgenden Identitäten (dabei seien $c, d \neq 0$, ansonsten seien alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebig).

(1)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(2)
$$\frac{0}{c} = 0\,,$$

(3)
$$\frac{c}{c} = 1\,,$$

(4)
$$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd}\,.$$

Die Addition und die Multiplikation auf rationalen Zahlen wird folgendermaßen festgelegt.

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd},$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}.$$

Man addiert also zwei rationale Zahlen, indem man die Nenner gleichnamig macht. Diese Operationen sind wohldefiniert und wieder assoziativ, kommutativ und es gilt das Distributivgesetz. Diese Eigenschaften kann man auf die entsprechenden Eigenschaften der ganzen Zahlen zurückführen, siehe Aufgabe 3.1.

Die $0 = \frac{0}{1}$ hat wieder die Eigenschaft
$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$
und die $1 = \frac{1}{1}$ hat wieder die Eigenschaft
$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$
Ferner gibt es wieder zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ die negative Zahl $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$. Sie besitzt die charakteristische Eigenschaft
$$-\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = 0.$$
Zu einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \neq 0$ (also wenn Zähler und Nenner von 0 verschieden sind) ist auch der umgedrehte Bruch $\frac{b}{a}$ eine rationale Zahl, und es gilt
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$
Man nennt $\frac{b}{a}$ die *inverse rationale Zahl* zu $\frac{a}{b}$. Mit all diesen Festlegungen ist $\mathbb{Q}$ ein Körper.

Man kann die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden platzieren (die ganzen Zahlen seien dort schon platziert). Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}_+$ findet man so: Man unterteilt die Strecke von 0 nach a in b gleichlange Teilstrecken. Die Zahl $\frac{a}{b}$ ist dann die rechte Grenze des (von links) ersten Teilintervalls. Insbesondere ist $\frac{1}{b}$ die Länge des Intervalls, dass b-fach nebeneinander gelegt die Einheitsstrecke (oder das Einheitsintervall) ergibt.[7]

Als Punkte auf der Zahlengeraden lassen sich rationale Zahlen ihrer Größe nach vergleichen. Dabei gilt für $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}_+$ die Beziehung
$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$$

[7]Die Frage, wie man diese Unterteilung elementar durchführt, besprechen wir hier nicht.

genau dann, wenn in $\mathbb{Z}$ die Beziehung

$$ad \geq bc$$

gilt. Um dies einzusehen, bringt man die beiden rationalen Zahlen auf den Hauptnenner, d.h. man vergleicht $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{cb}{bd}$. Die Größerbeziehung hängt dann allein von den beiden Zählern ab.

3.3. **Die Binomialkoeffizienten.**

Definition 3.6. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Bei einer n-elementigen Menge M gibt es $n!$ bijektive Abbildungen von M nach M. Gleichbedeutend damit ist, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Objekte auf n Plätze zu verteilen.

Definition 3.7. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$.[8] Dann nennt man

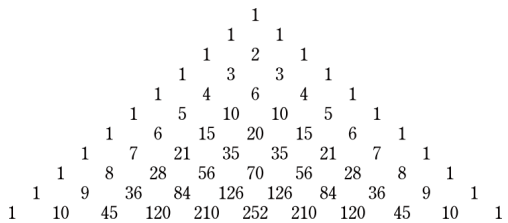
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

Diesen Bruch kann man auch als

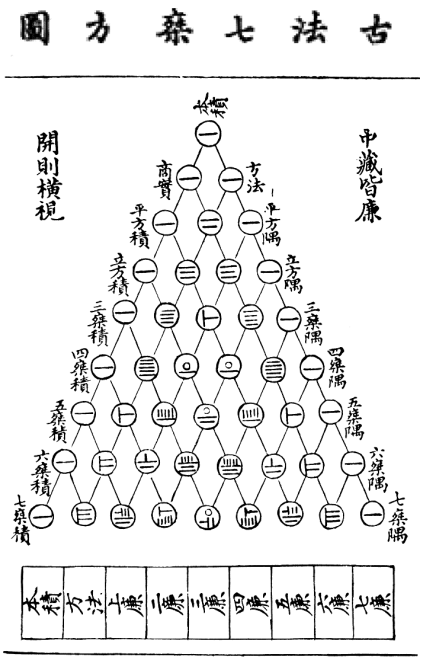
$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$$

schreiben, da die Faktoren aus $(n-k)!$ auch in $n!$ vorkommen und daher kürzbar sind. In dieser Darstellung stehen im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren. Von der Definition her ist es nicht sofort klar, dass es sich bei den Binomialkoeffizienten um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

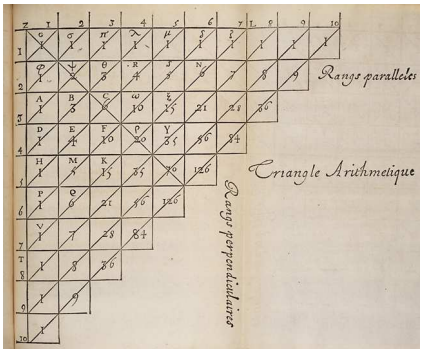


Das *Dreieck der Binomialkoeffizienten* war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,

[8] Bei $k > n$ setzen wir die Binomialkoeffizienten gleich 0.



in China heißt es *Yanghui-Dreieck* (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das *Pascalsche Dreieck* (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

Lemma 3.8. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Bedingung*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 3.11. □

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ hat die folgende inhaltliche Bedeutung: Er gibt für eine n-elementige Menge M die Anzahl sämtlicher k-elementigen Teilmengen von M an, siehe Aufgabe 3.14.

Die folgende Formel bringt die Addition und die Multiplikation in einem Körper miteinander in Beziehung.

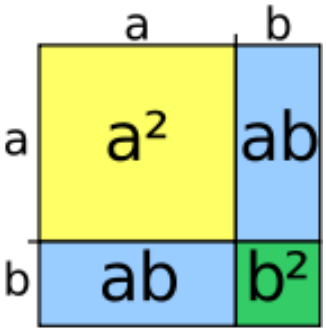
Satz 3.9. *Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

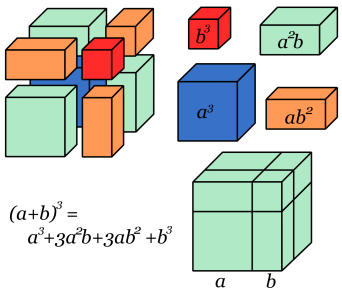
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□





3. Arbeitsblatt

3.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 3.1. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.2. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}\,,$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw+yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x-z)\cdot(y-w) = (x+w)\cdot(y+z) - (z+w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x+y}{z+w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a+b)\cdot(a+c)\,,$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.4. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 3.5. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Aufgabe 3.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften dann ebenfalls gelten.

Aufgabe 3.7. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x+y,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x\cdot y.$$

Aufgabe 3.8.*

Zwei Personen, A und B, liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B?

Aufgabe 3.9. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

Aufgabe 3.10. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

Aufgabe 3.11. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 3.12. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 3.13. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 3.14.*

Es sei M eine n-elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

ist.

Aufgabe 3.15.*

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

3.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 3.16. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b \colon K \longrightarrow K,\, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Aufgabe 3.17. (3 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 3.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d \neq 0$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 3.19. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) |\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0)\,,$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

Aufgabe 3.20. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\,.$$

4. Vorlesung - Anordnung

4.1. **Angeordnete Körper.**

Zwei reelle Zahlen kann man ihrer Größe nach vergleichen, d.h. die eine ist größer als die andere oder es handelt sich um die gleiche Zahl. Auf der Zahlengeraden bedeutet dies, dass die eine Zahl rechts von der anderen liegt. Die wesentlichen Eigenschaften der Größerbeziehung werden im Begriff des angeordneten Körpers zusammengefasst. Um dieses Konzept formulieren zu können, führen wir kurz die grundlegenden Begriffe Relation und Ordnungsrelation ein.

Definition 4.1. Seien X und Y Mengen. Eine *Relation* zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.

D.h. bei einer Relation stehen gewisse Paare (x, y) in der gegebenen Relation, und die anderen Paare eben nicht. Man schreibt dafür $(x, y) \in R$ oder $R(x, y)$ oder xRy. Im Moment sind wir an Ordnungsrelationen interessiert, die folgendermaßen definiert werden.

Definition 4.2. Eine Relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I heißt *Ordnungsrelation* oder *Ordnung*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $i \preccurlyeq i$ für alle $i \in I$.
(2) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq k$ folgt stets $i \preccurlyeq k$.
(3) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq i$ folgt $i = j$.

Definition 4.3. Eine Ordnungsrelation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I heißt *lineare Ordnung* (oder *totale Ordnung*), wenn zu je zwei Elementen $x, y \in I$ die Beziehung $x \preccurlyeq y$ oder $y \preccurlyeq x$ gilt.

Definition 4.4. Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften

(1) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
(2) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)

erfüllt.

Statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Eine wichtige Beziehung in einem angeordneten Körper ist, dass $a \geq b$ äquivalent zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem ersten Axiom. In einem angeordneten Körper nennt man ein Element $a \in K$ *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*,[9] wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ,

[9]Man beachte, dass hier negativ in einem neuen Sinn auftritt. In jedem Körper K gibt zu jedem Element $x \in K$ das negative Element $-x$, also das Inverse von x bzgl. der Addition. Das Element $-x$ ist aber nicht in einem absoluten Sinn negativ, sondern nur in Bezug auf x. Dagegen gibt es in einem angeordneten Körper wirklich negative und positive Elemente.

und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Mengen schreibt man

$$K_+,\ K_-,\ K_{\geq 0} = K_+^0,\ K_{\leq 0} = K_-^0$$

oder Ähnliches. Die wichtigsten Beispiele für angeordnete Körper sind der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Lemma 4.5. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 > 0$,
(2) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$,
(3) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.7. □

Definition 4.6. Sei K ein angeordneter Körper. Zu $a, b \in K$, $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in K \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in K \mid x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in K \mid x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in K \mid x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls*, genauer spricht man von oberer und unterer Grenze. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Zutreffender (also weniger konventionsverhaftet) wäre es von „größerseitig offen“ und „kleinerseitig offen“ zu sprechen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in K ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in K \mid x > a\}$.

Bemerkung 4.7. Ein äquivalenter Zugang zum Begriff des angeordneten Körpers funktioniert so: Man hat einen Körper K, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ (die „positive Hälfte“) ausgezeichnet ist mit den folgenden Eigenschaften

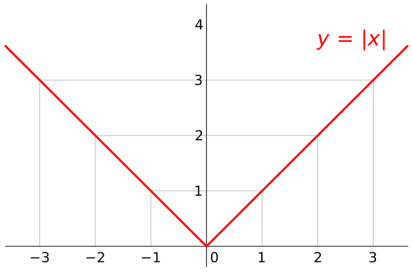
(1) Entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

In einem angeordneten Körper erfüllen die positiven Elemente diese Bedingungen. Man kann aber umgekehrt aus einem Körper mit einer solchen positiven Teilmenge einen angeordneten Körper machen, indem man

$$x \geq y \text{ durch } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

definiert, siehe Aufgabe 4.23.

4.2. **Der Betrag.**



Definition 4.8. In einem angeordneten Körper K ist der *Betrag* eines Elementes $x \in K$ folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ (da aus $x < 0$ die Beziehung $-x > 0$ folgt, vergleiche Aufgabe 4.5) und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto |x|\,,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 4.9. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann erfüllt die Betragsfunktion*

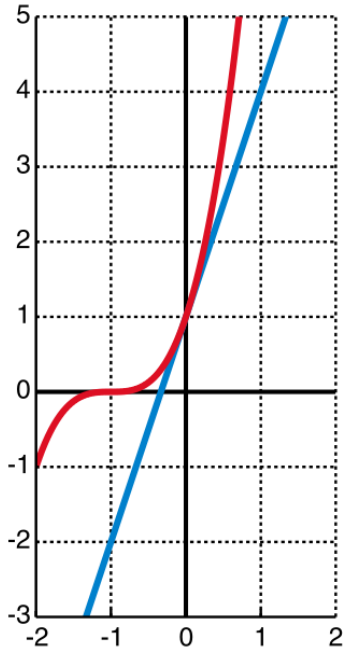
$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto |x|\,,$$

folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) $|x| = |y|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*

Beweis. Siehe Aufgabe 4.21. □

4.3. **Bernoulli'sche Ungleichung.**



In der folgenden Aussage verwenden wir für ein Element $z \in K$ in einem Körper und einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweisen

$$nz = \underbrace{z + \cdots + z}_{n-\text{mal}} \text{ und } z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n-\text{mal}} .$$

Satz 4.10. *Sei K ein angeordneter Körper und n eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes $x \in K$ mit $x \geq -1$ die Abschätzung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx .$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

da natürliche Zahlen und Quadrate in einem angeordneten Körper nichtnegativ sind. □

4.4. **Archimedisch angeordnete Körper.**

Wenn man sich wie üblich die reellen Zahlen als Zahlengerade vorstellt, so ist das nächste Axiom selbstverständlich. Es gibt aber auch sehr interessante angeordnete Körper, in denen dieses Axiom nicht gilt; es gilt auch nicht im Rahmen der sogenannten non-standard Analysis. Zur Formulierung dieses Axioms muss man jede natürliche Zahl in einem Körper K interpretieren können. Dies geschieht, indem man einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ das Körperelement

$$n_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n-\text{mal}}$$

zuordnet.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Definition 4.11. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann heißt K *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq x$$

gibt.

Diese Eigenschaft ist für negative Elemente stets erfüllt, für positive Elemente handelt es sich aber um eine echte neue Bedingung, die nicht jeder angeordnete Körper erfüllt. Einen archimedisch angeordneten Körper kann man sich als eine *Zahlengerade* vorstellen, auf denen auch die ganzen Zahlen liegen. Mit Zahlengerade wird noch nichts genaues über „Lücken“ oder „Kontinuität“ behauptet.

Lemma 4.12. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es zu $x, y \in K$ mit $x > 0$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

Beweis. Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n \geq y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 4.5 (2) auch $nx \geq y$. □

Lemma 4.13. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $x > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq x$.*

Beweis. Es ist x^{-1} eine wohldefinierte nach Aufgabe 4.9 positive Zahl und daher gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x^{-1} \geq 0$. Dies ist nach Aufgabe 4.11 äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} \leq (x^{-1})^{-1} = x.$$

□

Im folgenden Lemma verwenden wir, dass man zunächst die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in einem angeordneten Körper K wiederfindet und dass man dann auch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in K wiederfindet. Die rationale Zahl n/m ist als das Element $n_K \cdot (m_K)^{-1}$ zu interpretieren, siehe auch Aufgabe 4.24.

Lemma 4.14. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper Dann gibt es zwischen je zwei Elementen $x < y$ auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y$$

Beweis. Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach Lemma 4.13 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Nach Lemma 4.12 gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n\frac{1}{k} > x$ und ein $n' \in \mathbb{Z}_-$ mit $n'\frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$n\frac{1}{k} > x \text{ und } (n-1)\frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

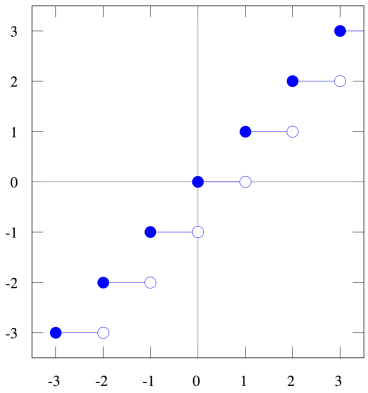
$$\frac{n}{k} = \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y$$

wie gewünscht. □

In einem archimedisch angeordneten Körper bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte Überdeckung, d.h. es ist

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$$

und $[m, m+1[\cap [n, n+1[= \emptyset$ für $m \neq n$. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



Definition 4.15. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Die *Gauß-klammer* ist die Funktion

$$\lfloor\ \rfloor\colon\ K \longrightarrow K,\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor,$$

die durch

$$\lfloor x \rfloor = n,\ \text{falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert wird.

Da die Werte der Gaußklammer die ganzen Zahlen sind, kann man die Gauß-klammer auch als eine Abbildung $K \to \mathbb{Z}$ auffassen.

Lemma 4.16. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x > 1$. Dann gibt es zu jedem $B \in K$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$x^n \geq B\,.$$

Beweis. Wir schreiben $x = 1 + u$ mit $u > 0$. Aufgrund von Lemma 4.12 gibt es eine natürliche Zahl n mit $nu \geq B - 1$. Damit gilt unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzung

$$x^n \ = \ (1+u)^n \ \geq \ 1 + nu \ \geq \ 1 + B - 1 \ = \ B.$$

□

4. Arbeitsblatt

4.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 4.1. Man gebe fünf rationale Zahlen an, die (echt) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegen.

Aufgabe 4.2. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ mit der durch $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, falls $ad \geq cb$ in $\mathbb{Z}$ gilt, definierten Beziehung ein angeordneter Körper ist (dabei dürfen nur Eigenschaften der Ordnung auf $\mathbb{Z}$ verwendet werden).

Aufgabe 4.3.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}\,.$$

Aufgabe 4.4.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 4.5. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass $-x < 0$ ist.

(Bemerkung: Diese Aussage kann man so verstehen, dass das Negative eines positiven Elementes negativ ist. Allerdings tritt dabei negativ in zwei verschiedenen Bedeutungen auf!)

Aufgabe 4.6. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für jedes $x \in K$ die Beziehung $x^2 = xx \geq 0$ gilt.

Aufgabe 4.7. Beweise die folgenden Aussagen:

In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.

(1) $1 > 0$,
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$,
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.

Aufgabe 4.8. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y$. Zeige, dass dann $-x < -y$ ist.

Aufgabe 4.9. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Man folgere daraus, dass die positiven Elemente in einem angeordneten Körper bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

Aufgabe 4.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 4.11. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

Aufgabe 4.12. Zeige, dass der in Aufgabe 3.19 konstruierte Körper K nicht angeordnet werden kann.

Aufgabe 4.13. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die in Aufgabe 3.6 eingeführte Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K,\, n \longmapsto n_K,$$

injektiv ist.

Aufgabe 4.14. Zeige die Abschätzung

$$\binom{d+n}{n} \geq \left(\frac{d}{n}\right)^n.$$

Aufgabe 4.15. Zeige die Abschätzung

$$2n^n \leq (n+1)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 4.16. Zeige die Abschätzung

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 4.17. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $x < y$ Elemente in K. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 4.18. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a) $\left|\frac{x-2}{3x-1}\right| \leq 1$.

b) $|4x-3| < |2x-3|$.

Aufgabe 4.19. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei vorausgesetzt, dass in K die (positiven) Elemente $8^{1/2}$ und $25^{1/3}$ existieren. Welches ist größer?

Aufgabe 4.20. Es sei K ein angeordneter Körper. Man untersuche die Verknüpfung

$$K \times K \longrightarrow K,\, (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 4.21. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto |x|\,,$$

in einem angeordneten Körper(dabei seien x, y beliebige Elemente in K).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y-x| = |x-y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x+y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 4.22. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K \,|\, x \geq n \text{ und } x < n+1\}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

4.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 4.23. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, bei dem eine Teilmenge $P \subseteq K$ ausgezeichnet sei, die den folgenden Bedingungen genügt.

(1) Für $x \in K$ ist entweder $x \in P$ oder $-x \in P$ oder $x = 0$.
(2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$.
(3) Aus $x, y \in P$ folgt $x \cdot y \in P$.

Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \geq y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x - y \in P$$

ein angeordneter Körper entsteht.

Aufgabe 4.24. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Betrachte die in Aufgabe 4.13 konstruierte injektive Zuordnung $\mathbb{Z} \subset K$. Zeige, dass man diese Zuordnung zu einer Zuordnung $\mathbb{Q} \subseteq K$ fortsetzen kann, und zwar derart, dass die Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen in K übereinstimmen und die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ mit der Ordnung auf K übereinstimmt.

Aufgabe 4.25. (4 Punkte)

Betrachte die Menge

$$K = \left\{ q + p\sqrt{5} | \, p, q \in \mathbb{Q} \right\},$$

wobei $\sqrt{5}$ zunächst lediglich ein Symbol ist. Definiere eine Addition und eine Multiplikation auf dieser Menge derart, dass $\sqrt{5}^2 = 5$ ist und dass K zu einem Körper wird. Definiere eine Ordnung derart, dass K zu einem angeordneten Körper wird und dass $\sqrt{5}$ positiv wird. Ist das Element $23 - 11\sqrt{5}$ positiv oder negativ?

Aufgabe 4.26. (2 Punkte)

Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 4.27. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ Elemente. Zeige, dass dann

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

gilt.

5. Vorlesung - Folgen

Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

5.1. **Folgen in einem angeordneten Körper.**

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

Beispiel 5.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. In jedem angeordneten Körper K gibt es eine 5, ob es aber ein solches x gibt ist eine nichttriviale zusätzliche Eigenschaft von K. Wenn es in K eine solches x gibt, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nicht geben, siehe Aufgabe 5.1, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unterhalb jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzeln beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h. die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a = x_0 = 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$, wobei diese Ungleichung (zunächst) nur Sinn ergibt, wenn x in K existiert. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 >$

1 und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a\,,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt, und zwar unabhängig davon, ob $\sqrt{5}$ zu K gehört oder nicht, solange nur a dazu gehört. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von 5 zwischen 2 und 5/2 liegt. Man nimmt das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 \;=\; \frac{2+\frac{5}{2}}{2} \;=\; \frac{9}{4}.$$

Wegen $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 \;=\; \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} \;=\; \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Appproximation von $\sqrt{5}$.

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 5.2. Beim *Heron-Verfahren* zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und c/x_0. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$\begin{aligned} x_1^2 - c \;&=\; \left(\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c \\ &=\; \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c \\ &=\; \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} \\ &=\; \left(\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 \;\geq\; 0. \end{aligned}$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}\,.$$

Nach Konstuktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ und $x_n \cdot c/x_n = c$ folgt, dass $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c$ ist. Bei jedem

Schritt gilt

$$[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subseteq [\frac{c}{x_n}, x_n],$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n ein Element in K, das eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 5.3. Es sei M eine Menge. Eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M,\ n \longmapsto x_n,$$

nennt man auch eine *Folge* in M.

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Im Folgenden beschränken wir auf Folgen, deren Werte in einem angeordneten Körper liegen, speziell in $\mathbb{R}$ (reelle Folge), später werden wir auch mit Folgen in metrischen Räumen arbeiten. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen.

Der folgende Begriff ist zentral.

Definition 5.4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

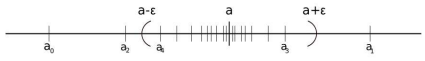
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), anderfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie

weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner die Zielgenauigkeit, also je besser die Approximation sein sollen, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand.

Zu einem $\epsilon > 0$ und $x \in K$ nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die ϵ-*Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



Beispiel 5.5. Eine *konstante Folge* $x_n = c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| \;=\; |c - c| \;=\; |0| \;=\; 0 \;<\; \epsilon$$

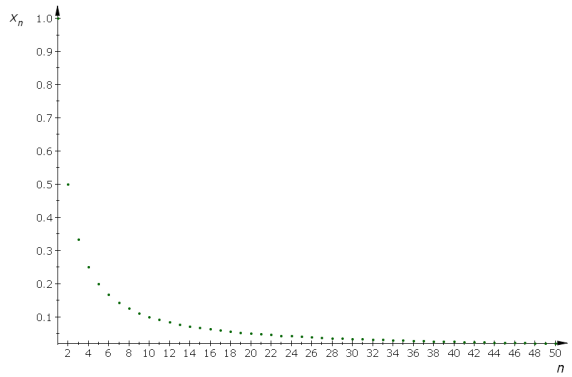
für alle n.

Es sei nun K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann ist die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Daraus folgt $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n \;=\; \frac{1}{n} \;\leq\; \frac{1}{n_0} \;\leq\; \epsilon.$$



Lemma 5.6. *Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann besitzt x_n maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0' \,.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d \,=\, |x - y| \,\leq\, |x - x_n| + |x_n - y| \,\leq\, \epsilon + \epsilon \,=\, 2d/3.$$

□

5.2. **Beschränktheit.**

Definition 5.7. Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ eine Teilmenge.

(1) Ein Element $S \in K$ heißt eine *obere Schranke* für M, wenn $x \leq S$ gilt für alle $x \in M$.
(2) Ein Element $s \in K$ heißt eine *untere Schranke* für M, wenn $x \geq s$ gilt für alle $x \in M$.
(3) M heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine obere Schranke für M existiert.
(4) M heißt *nach unten beschränkt*, wenn eine untere Schranke für M existiert.
(5) M heißt *beschränkt*, wenn M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
(6) Ein Element $T \in M$ heißt das *Maximum* von M, wenn $T \geq x$ für alle $x \in M$ ist. gilt.
(7) Ein Element $t \in M$ heißt das *Minimum* von M, wenn $t \leq x$ für alle $x \in M$ ist. gilt.
(8) Eine obere Schranke T von M heißt das *Supremum* von M, wenn $T \leq S$ für alle oberen Schranken S von M gilt.
(9) Eine untere Schranke t von M heißt das *Infimum* von M, wenn $t \geq s$ für alle unteren Schranken s von M gilt.

Obere und untere Schranken muss es nicht geben. Wenn S eine obere Schranke ist, so ist auch jede größere Zahl eine obere Schranke. Für das offene Intervall $]0, 1[$ ist 1 das Supremum, aber nicht das Maximum, da 1 nicht dazu gehört. Entsprechend ist 0 das Infimum, aber nicht das Minimum. Beim

abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ sind die beiden Grenzen Maximum und Minimum.

All diese Begriffe werden auch für Folgen angewendet, und zwar für die Bildmenge $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$. Für die Folge $1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist 1 das Maximum und das Supremum, 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum.

Lemma 5.8. *Es sei K ein angeordneter Körper. Wenn eine Folge in K konvergent ist, so ist sie auch beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in K$ und es sei $\epsilon > 0$. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \, .$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \, .$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n<n_0} \{ |x_n| \, , \, |x| + \epsilon \}$$

wohldefiniert ist. Daher ist B eine obere Schranke und $-B$ eine untere Schranke für $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$. □

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

Beispiel 5.9. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $c \in K$, $c \neq 0$. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n \, = \, (-1)^n c$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus

$$|x_n| \, = \, |(-1)^n| \, |c| \, = \, |c| \, .$$

Konvergenz liegt aber nicht vor. Nehmen wir an, dass $x \geq 0$ der Grenzwert sei. Dann gilt für positives $\epsilon < |c|$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| \, = \, c + x \, \geq \, c \, > \, \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ-Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

Wenn man im obigen Beispiel $x_n = (-1)^n c$ nur die geraden Indizes betrachtet, so ist $x_{2n} = c$ konstant. Entsprechend ist für ungerade Indizes $x_{2n+1} = -c$ konstant. Teilfolgen im Sinne der folgenden Definition können also ziemlich andere Eigenschaften als die Folge selbst besitzen.

Definition 5.10. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Definition 5.11. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Definition 5.12. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_n mit $|x_n - x| \leq \epsilon$ gibt.

5. Arbeitsblatt

5.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 5.1. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 5.3. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 3$.

Aufgabe 5.4.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 5.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass K genau dann archimedisch angeordnet ist, wenn die Folge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.6. Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 5.7. Betrachte die folgenden (Pseudo)-Definitionen.

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

(1) Man sagt, dass die Folge gegen x *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon.$$

(2) Man sagt, dass die Folge gegen x *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(3) Man sagt, dass die Folge gegen x *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(4) Man sagt, dass die Folge gegen x *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(5) Man sagt, dass die Folge gegen x *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(6) Man sagt, dass die Folge gegen x *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(7) Man sagt, dass die Folge gegen x *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(8) Man sagt, dass die Folge gegen x *deuterovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$x_n - x \leq \epsilon$$

gilt.

Vergleiche diese Definitionen mit der Definition von Konvergenz. Worin besteht der Unterschied? Welche Bedeutung haben die einzelnen Definitionen? Welche Definitionen sind zueinander äquivalent, zwischen welchen besteht eine Implikation (Beweis oder Gegenbeispiel)? Für welche Definitionen ist das x eindeutig bestimmt?

Aufgabe 5.8. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in einem angeordneten Körper. Zeige, dass jede Teilfolge ebenfalls gegen x konvergiert.

Aufgabe 5.9. Man gebe ein Beispiel für eine Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 5.10. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Q}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} | \, x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} | \, x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 | \, x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 5.11. Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ eine Teilmenge, die ein Supremum T besitze. Zeige, dass T genau dann das Maximum von M ist, wenn $T \in M$ ist.

Aufgabe 5.12.*

Hans will sich ein Frühstücksei kochen. Im Moment, als er das Ei in das kochende Wasser eintaucht, zeigt seine Uhr 7 : 21 (die Uhr läuft genau und hat keine Sekundenangabe). Als er das nächste Mal auf die Uhr schaut, zeigt sie 7 : 26 an. Bestimme das Infimum, Minimum, Supremum, Maximum der Zeit, die das Ei zwischen den beiden Momenten im Wasser ist.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,,\, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 5.13. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt ($n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 5.14. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 5.15. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.16. Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 5.17. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge in K nach unten beschränkt ist.

Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten, aber nicht nach oben beschränkt ist, und die nicht bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 5.18. Bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

gegeben ist.

5.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 5.19. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 5.20. (3 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x \in K$ mit $|x| < 1$. Zeige, dass die Folge

$$x_n := x^n$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.21. (3 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.22. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe Beispiele für konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 5.23. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass x genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

6. Vorlesung - Cauchy-Folgen

6.1. Rechenregeln für Folgen.

Lemma 6.1. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

(3) *Für $c \in K$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$

(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$

(5) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Beweis. (2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C = \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit
$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2\,.$$
Diese Abschätzungen gelten dann auch für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher
$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht 0 ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz

von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x_n - x}{x x_n}\right| = \frac{1}{|x|\,|x_n|}\,|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} = \epsilon.$$

□

Lemma 6.2. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.5. □

Daraus folgt insbesondere, dass wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]$ konvergiert, dann der Grenzwert ebenfalls zu dem abgeschlossenen Intervall gehören muss.

Die folgende Aussage nennt man das *Quetschkriterium*.

Lemma 6.3. *Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.6. □

Definition 6.4. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann heißt die Folge *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

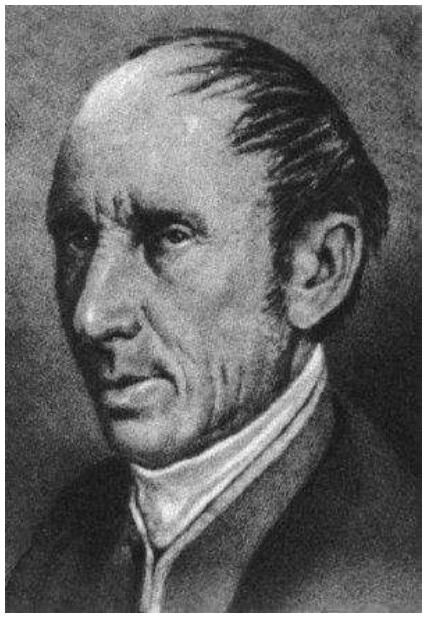
Die Folge heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als gemeinsamen Begriff für waschsende oder fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung *monotone Folgen*.

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch (nach oben) beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Das hängt vom angeordneten Körper ab! Innerhalb der rationalen Zahlen sind beispielsweise die mit dem Heronverfahren konstruierten Folgen fallend (wenn man mit einem zu großen Startwert anfängt) und auch beschränkt (durch jede rationale Zahl, deren Quadrat kleiner als a ist), sie besitzen aber im Allgemeinen keinen Limes in $\mathbb{Q}$. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, denen wir uns jetzt zuwenden, sind gerade dadurch ausgezeichnet, dass darin jede wachsende (fallende), nach oben (unten) beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt.

6.2. **Cauchy-Folgen.**

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das baybylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in einem beliebigen angeordneten Körper betrachten, in dem $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Lemma 6.6. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge genau dann, wenn folgende Bedingung gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon$ gilt.*

Beweis. Eine Cauchy-Folge erfüllt auch die angegebene Bedingung, da man ja $n_0 = n$ setzen kann. Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die zweite Bedingung gilt insbesondere für $\epsilon/2$, d.h. es gibt ein n_0 derart, dass für jedes $m \geq n_0$ die Abschätzung $|x_m - x_{n_0}| \leq \epsilon/2$. Damit gilt aufgrund der Dreiecksungleichung für beliebige $m, n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_n - x_{n_0}| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

so dass eine Cauchy-Folge vorliegt. □

Satz 6.7. *Es sei K ein angeordneter Körper. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0\,.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Lemma 6.8. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in K$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, und verwenden die Charakterisierung aus Lemma 6.6. Somit gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 ein $m > n_0$ gibt mit $x_m - x_{n_0} \geq \epsilon$ (wir können die Betragstriche weglassen). Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_0 = 0\,,$$

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon\,,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon\,,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_0\,.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_0 &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \cdots + (x_{n_2} - x_{n_1}) \\ &\quad +(x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_0. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. □

6.3. **Der Körper der reellen Zahlen.**

Definition 6.9. Es sei K ein angeordneter Körper. Er heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Grenzwert besitzt).

Definition 6.10. Einen archimedisch angeordneten vollständigen Körper nennt man *Körper der reellen Zahlen*. Er wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Die reellen Zahlen sind also ein vollständig und archimedisch angeordneter Körper. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen vollständig und archimedisch angeordnete Körper sind, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen Isomorphismus).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Dedekindschen Schnitte oder die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung. Darauf werden wir hier verzichten.

Statt von einem vollständig und archimedisch angeordneten Körper werden wir von nun an von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sprechen. Als Beweismittel sind aber lediglich die genannten Axiome erlaubt.

6. Arbeitsblatt

6.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 6.1. Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6.2. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 6.1.

Für die folgende Aufgabe brauchen wir den Begriff der Polynomfunktion.

Es sei K ein Körper und seien $a_0, a_1, \ldots, a_d \in K$. Eine Funktion

$$P\colon\ K \longrightarrow K,\ x \longmapsto P(x),$$

mit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$$

heißt *Polynomfunktion.*

Aufgabe 6.3. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d, dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 6.4.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.5. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 6.6.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 6.7. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 6.8. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

Aufgabe 6.9. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Die folgende Aufgabe setzt Kenntnisse in linearer Algebra voraus.

Aufgabe 6.11.*

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_+} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0\right\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n\in\mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

6.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 6.12. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Aufgabe 6.13. (3 Punkte)

Zeige, dass die beiden im Wikipediaartikel „Dedekindscher Schnitt“ in der aktuellen Version (Version vom 4.10.2013 https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Dedekindscher_Schnitt&oldid=123123410) angegebenen Definitionen nicht wie dort behauptet zueinander äquivalent sind. Man gebe jeweils Beispiele an, die die eine, aber nicht die andere Definition erfüllen.

Aufgabe 6.14. (5 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.15. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ ein Polynom mit $d \geq 1$ und $a_d \neq 0$. Zeige, dass dann die durch

$$y_n := P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

definierte Folge bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, falls $a_d > 0$ ist, und bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, falls $a_d < 0$ ist.

Man folgere, dass die Folgenglieder

$$\frac{1}{y_n}$$

für n hinreichend groß definiert sind und gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 6.16. (4 Punkte)

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

7. Vorlesung - Vollständigkeit

7.1. **Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen.**

Korollar 7.1. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 6.8 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. □

Diese Aussage ist auch die Grundlage dafür, dass die Dezimalentwicklung stets eine (eindeutige) reelle Zahl definiert. Eine (unendliche) Dezimalentwicklung

$$a, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots$$

mit $a \in \mathbb{N}$ (wir beschränken uns auf nichtnegative Zahlen) und $a_{-n} \in \{0,\dots,9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich zu verstehen als die Folge der rationalen Zahlen

$$x_0 := a,\ x_1 := a + a_{-1}\cdot\frac{1}{10},\ x_2 := a + a_{-1}\cdot\frac{1}{10} + a_{-2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2,\ \text{etc.}$$

Diese ist offenbar monoton wachsend. Wir werden in einer der nächsten Vorlesung sehen, dass sie nach oben beschränkt ist (beispielsweise durch $a+1$), so dass dadurch in der Tat eine reelle Zahl definiert wird.

Eine weitere Möglichkeit, reelle Zahlen zu beschreiben, wird durch Intervallschachtelungen gegeben.

Definition 7.2. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in K heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ,$$

gegen 0 konvergiert.

Satz 7.3. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.19. □

Genauer gilt, dass bei einer Intervallschachtelung sowohl die Folge der unteren Intervallgrenzen als auch die Folge der oberen Intervallgrenzen gegen ein und dieselbe Zahl konvergieren. Ebenso konvergiert jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in I_n$ gegen diesen Grenzwert, siehe Aufgabe 7.10.

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen sichert auch die Existenz einer eindeutig bestimmten Quadratwurzel für eine nichtnegative reelle Zahl.

Satz 7.4. *Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es eine eindeutige nichtnegative reelle Zahl x mit $x^2 = c$. Diese Zahl x heißt die* Quadratwurzel *von c und wird mit $\sqrt{c}$ bezeichnet.*

Beweis. Nach Aufgabe 5.1 kann es maximal zwei Zahlen geben, deren Quadrat gleich c ist, und diese Zahlen sind wegen

$$(-x)^2 \;=\; (-1)^2x^2 \;=\; x^2$$

negativ zueinander. Es kann also maximal nur eine nichtnegative Quadratwurzel geben. Die Existenz wird durch das babylonische Wurzelziehen gesichert, das eine Intervallschachtelung beschreibt. Nach Satz 7.3 legt eine Intervallschachtelung eine eindeutig bestimmte reelle Zahl fest. Nennen wir diese Zahl x. Wir müssen zeigen, dass diese Zahl in der Tat eine Quadratwurzel von c ist, dass also $x^2 = c$ ist. Bei $c = 0$ ist dies klar, wir nehmen also $c > 0$ an. Die Intervallgrenzen sind durch

$$x_{n+1} \;=\; \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}$$

und $\frac{c}{x_n}$ bestimmt und die Folge x_n konvergiert gegen x. Dies gilt auch für die „verschobene“ Folge x_{n+1}. Nach den Rechengesetzen für konvergente Folgen gilt somit

$$x \;=\; \frac{x + \frac{c}{x}}{2}.$$

Dies ergibt

$$x \;=\; \frac{c}{x}$$

und somit $x^2 = c$. □

Bei einer wachsenden, nach oben beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man den Grenzwert auch auffassen als das Supremum der Menge $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$. Insofern ist die folgende Aussage eine weitreichende Verallgemeinerung von Korollar 7.1.

Satz 7.5. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und y_0 eine obere Schranke für M, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$ wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes y_n eine obere Schranke von M ist (so

dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle n ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis n bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

und

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert sie Korollar 7.1 sie gegen einen Grenzwert, sagen wir x. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt und konvergiert gegen denselben Grenzwert x. Wir behaupten, dass dieses x das Supremum von M ist. Wir zeigen zuerst, dass x eine obere Schranke von M ist. Sei dazu $z > x$ für ein $z \in M$ angenommen. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es insbesondere ein n mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes y_n eine obere Schranke von M ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass x kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von M ist. Sei dazu u eine obere Schranke von M und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es wieder ein n mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass u eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

Mit diesem Satz kann man einfach die Existenz von beliebigen Wurzeln nachweisen.

Beispiel 7.6. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \middle|\, x^k \leq a \right\}\,.$$

Diese Menge ist wegen $0 \in M$ nicht leer und nach oben beschränkt (bei $a \leq 1$ ist 1 eine obere Schranke, sonst ist a eine obere Schranke). Es sei $s = \sup(M)$, das es nach Satz 7.5 geben muss. Dann ist $s^k = a$, d.h. s ist eine k-te Wurzel von a, da sowohl die Annahme $s^k < a$ als auch die Annahme $s^k > a$ zu einem Widerspruch führt, siehe Aufgabe 7.15.

7.2. **Der Satz von Bolzano-Weierstraß.**

Karl Weierstraß (1815-1897)

Die folgende Aussage heißt *Satz von Bolzano-Weierstraß.*

Satz 7.7. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]\,.$$

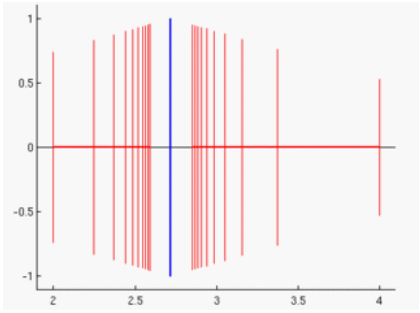
In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. □

Eine äquivalente Formulierung ist, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt besitzt.

7.3. **Die eulersche Zahl e.**



Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl e*.

Lemma 7.8. *Die Intervalle* $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, *mit den Grenzen*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n < a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ (es sei $n \geq 2$) die Abschätzung

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n.$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ergibt sich

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllängen. Diese sind

$$b_n - a_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - a_n = a_n \frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergieren somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. □

Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Satz 7.3 eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

Definition 7.9. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *eulersche Zahl*.

Ihr nummerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\ldots.$$

Wir werden bei der Behandlung der Exponentialfunktion auf die eulersche Zahl zurückkommen und einer andere Beschreibung dafür kennenlernen.

7. Arbeitsblatt

7.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 7.1. Zeige, dass das *Quadrieren*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

eine wachsende Funktion ist. Man folgere daraus, dass auch die Quadratwurzel

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ u \longmapsto \sqrt{u},$$

eine wachsende Funktion ist.

Aufgabe 7.2. Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen s und t die Beziehung

$$\sqrt{st} = \sqrt{s}\sqrt{t}$$

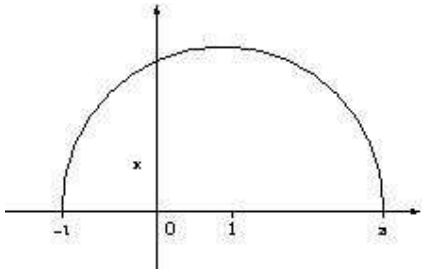
besteht.

Aufgabe 7.3. Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen“ Strecken vorkommen.

Tipp: Satz des Pythagoras.

Aufgabe 7.4. Zeige, dass man zu jeder gegebenen Streckenlänge a (also jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Tipp: Satz des Pythagoras und Bild unten.



Aufgabe 7.5. Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 7.6. Es sei x eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0,3333333333...$$

(die weiterer Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

Aufgabe 7.7. Die beiden reellen Zahlen x und y seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Zifferentwicklungen eine Folge mit rationalen Gleidern an, die gegen xy konvergiert.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 7.8. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 7.9. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 7.10. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 7.11. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{2}$$

eine Folge definiert wird, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 7.12. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, die eine konvergente Teilfolge enthalte. Zeige, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 7.13. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in K. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn die Menge $\{x_n |\, n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum besitzt.

Aufgabe 7.14. Es seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ferner sei $A + B := \{a + b |\, a \in A,\, b \in B\}$ und $A - B := \{a - b |\, a \in A,\, b \in B\}$.

(1) Zeige, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
(2) Wie lautet die entsprechende Formel für $\sup(A - B)$?
(3) Zeige, dass $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
(4) Was lässt sich über $\sup(A \cap B)$ sagen?
(5) Wie lautet die Entsprechung zu 3. für unendlich viele Mengen?

Aufgabe 7.15. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$, $M = \left\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} |\, x^k \leq a\right\}$ und $s = \sup(M)$. Zeige $s^k = a$.

Aufgabe 7.16. Es sei K ein angeordneter Körper, der nicht archimedisch angeordnet sei. Zeige, dass für K die Aussage das Satzes von Bolzano-Weierstraß nicht gilt.

Aufgabe 7.17. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a) $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$,

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 7.18. Berechne mit einem Computer die ersten hundert Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Für welches n wird diese Genauigkeit erreicht?

7.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 7.19. (3 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 7.20. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7.21. (6 Punkte)

Zeige, dass jede Folge in $\mathbb{R}$ eine monotone Teilfolge besitzt.

Aufgabe 7.22. (5 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass in ihm jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Zeige, dass K vollständig ist.

8. Vorlesung - Komplexe Zahlen

8.1. **Die komplexen Zahlen.**

In dieser Vorlesung führen wir aufbauend auf die reellen Zahlen die komplexen Zahlen ein. Damit haben wir alle für die Anfängervorlesungen relevanten Zahlbereiche zur Verfügung. Die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen ist einigermaßen kompliziert, obwohl die reellen Zahlen scheinbar vertraut sind. Dagegen ist die Einführung der komplexen Zahlen einfach, obwohl sie zunächst nicht vertraut aussehen.

Definition 8.1. Die Menge

$$\mathbb{R}^2$$

mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*. Er wird mit

$$\mathbb{C}$$

bezeichnet.

Die Addition ist also einfach die vektorielle Addition im $\mathbb{R}^2$, während die Multiplikation eine neuartige Verknüpfung ist, die zwar numerisch einfach durchführbar ist, an die man sich aber dennoch gewöhnen muss. Wir werden später noch eine geometrische Interpretation für die komplexe Multiplikation kennen lernen.

Lemma 8.2. *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 8.3. □

Wir lösen uns von der Paarschreibweise und schreiben

$$a + bi := (a, b)\,.$$

Insbesondere ist $i = (0, 1)$, diese Zahl heißt *imaginäre Einheit*. Diese Zahl hat die wichtige Eigenschaft

$$i^2 = -1\,.$$

Aus dieser Eigenschaft ergeben sich sämtliche algebraischen Eigenschaften der komplexen Zahlen durch die Körpergesetze. So kann man sich auch die obige Multiplikationsregel merken, es ist ja

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bic+bidi = ac+bdi^2+(ad+bc)i = ac-bd+(ad+bc)i.$$

Wir fassen eine reelle Zahl a als die komplexe Zahl $a + 0i = (a, 0)$ auf. In diesem Sinne ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Es ist gleichgültig, ob man zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen oder als komplexe Zahlen addiert oder multipliziert.

Definition 8.3. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

heißt

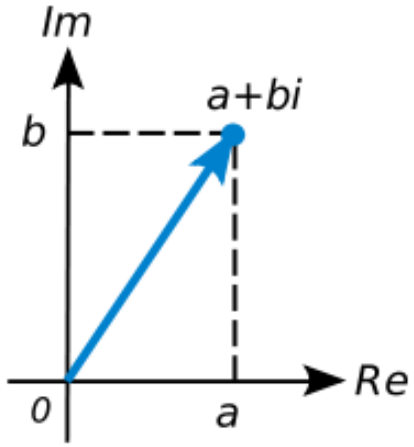
$$\mathrm{Re}\,(z) = a$$

der *Realteil* von z und

$$\mathrm{Im}\,(z) = b$$

heißt der *Imaginärteil* von z.

Man sollte sich allerdings die Menge der komplexen Zahlen nicht als etwas vorstellen, was weniger real als andere Zahlensysteme ist. Die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen ist bei Weitem einfacher als die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Allerdings war es historisch ein langer Prozess, bis die komplexen Zahlen als Zahlen anerkannt wurden; das Irreale daran ist, dass sie einen Körper bilden, der nicht angeordnet werden kann, und dass es sich daher scheinbar um keine Größen handelt, mit denen man sinnvollerweise etwas messen kann.



Man kann sich die komplexen Zahlen als die Punkte in einer Ebene vorstellen; für die additive Struktur gilt ja einfach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Gaussschen Zahlenebene*. Die horizontale Achse nennt man dann die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*.

Lemma 8.4. *Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen erfüllen folgende Eigenschaften (für z und w aus $\mathbb{C}$).*

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\,i$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z+w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist*

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\ .$$

(5) *Es ist $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 8.9. □

Definition 8.5. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} := a - bi,$$

heißt *komplexe Konjugation*.

Zu z heißt $\overline{z}$ die *konjugiert-komplexe Zahl* von z. Geometrisch betrachtet ist die komplexe Konjugation zu $z \in \mathbb{C}$ einfach die Achsenspiegelung an der reellen Achse.

Lemma 8.6. *Für die komplexe Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln (für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$).*

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(4) *Für* $z \neq 0$ *ist* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ *genau dann, wenn* $z \in \mathbb{R}$ *ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 8.22. □

Das Quadrat d^2 einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ, und die Summe von zwei nichtnegativen reellen Zahlen ist wieder nichtnegativ. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl c gibt es eine eindeutige nichtnegative *Quadratwurzel* $\sqrt{c}$, siehe Aufgabe 6.9. Daher liefert folgende Definition eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl.

Definition 8.7. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

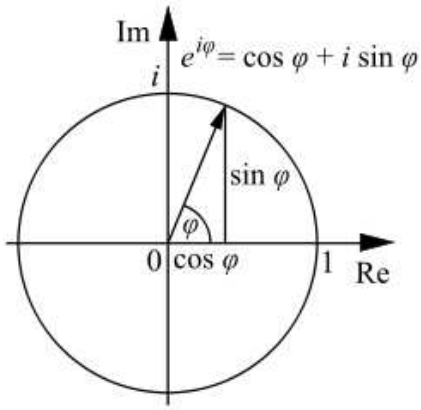
ist der *Betrag* durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

definiert.

Der Betrag einer komplexen Zahl z ist aufgrund des *Satzes des Pythagoras* der Abstand von z zum Nullpunkt $0 = (0, 0)$. Insgesamt ist der Betrag eine Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ z \longmapsto |z|\,.$$



Die Menge aller komplexen Zahlen mit einem bestimmten Betrag bilden einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit dem Betrag als Radius. Insbesondere bilden alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 den *komplexen Einheitskreis*. Die Zahlen auf dem komplexen Einheitskreis stehen durch die *eulersche Formel* in Beziehung zur komplexen Exponentialfunktion und zu den trigonometrischen Funktionen. Es sei hier erwähnt, dass das Produkt von zwei komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis sich ergibt, indem man die

zugehörigen Winkel, gemessen von der positiven reellen Achse aus gegen den Uhrzeigersinn, addiert.

Lemma 8.8. *Für eine komplexe Zahl z gelten die folgenden Beziehungen.*

(1) $|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$.
(2) $\text{Re}\ (z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\text{Im}\ (z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \text{Re}\ (z) - i\,\text{Im}\ (z)$.
(5) *Für $z \neq 0$ ist* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 8.10. □

Lemma 8.9. *Für den Betrag von komplexen Zahlen gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.*
(2) *Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.*
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) $|\text{Re}\ (z)|\,, |\text{Im}\ (z)| \leq |z|$.
(6) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
(7) *Für $z \neq 0$ ist* $|1/z| = 1/\,|z|$.

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung, für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 8.11. Zunächst gilt nach (5) für jede komplexe Zahl u die Abschätzung $\text{Re}\ (u) \leq |u|$. Daher ist

$$\text{Re}\ (z\overline{w}) \leq |z|\,|w|\ ,$$

und somit ist

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\,\text{Re}\ (z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich die gewünschte Abschätzung. □

Mit dem Betrag kann man auch die offenen und die abgeschlossenen Kreisscheiben zu einem Mittelpunkt $P \in \mathbb{C}$ und einem Radius $b \in \mathbb{R}_+$ definieren. Man nennt

$$B\,(P,b) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - P| \leq b\}$$

die *abgeschlossene Kreisscheibe* und

$$U\,(P,b) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - P| < b\}$$

die *offene Kreisscheibe*.

8.2. **Folgen von komplexen Zahlen.**

Mit Hilfe des Betrages kann man für zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ den Abstand durch

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

erklären. Dieser ist eine nichtnegative reelle Zahl. Mit diesem Abstandsbegriff lässt sich der Konvergenzbegriff für Folgen reeller Zahlen unmittelbar auf Folgen komplexer Zahlen verallgemeinern. Eine Folge komplexer Zahlen z_n setzt sich aus zwei reellen Folgen zusammen: Jedes z_n kann man als

$$z_n = x_n + iy_n$$

schreiben, wobei eben x_n der Realteil und y_n der Imaginärteil von z_n ist. Dabei gilt die Beziehung, dass die komplexe Folge z_n genau dann konvergiert, wenn die beiden reellen Folgen x_n und y_n in $\mathbb{R}$ konvergieren. Für den Grenzwert gilt dabei

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n,$$

siehe Aufgabe 8.12.

Mit dieser Beziehung kann man viele Gesetzmäßigkeiten für komplexe Folgen direkt aus der entsprechenden reellen Situation erhalten. Wir erwähnen explizit die folgenden Rechenregeln.

Satz 8.10. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

(3) *Für $c \in \mathbb{C}$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$

(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$

(5) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 8.13. □

8.3. **Quadratwurzeln von komplexen Zahlen.**

Die imaginäre Einheit i hat die wichtige Eigenschaft $i^2 = -1$. Das Negative von i besitzt die gleiche Eigenschaft, nämlich $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Damit gibt es zu jeder negativen reellen Zahl $-c$ (mit c positiv) in $\mathbb{C}$ die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{c}i$ und $-\sqrt{c}i$. Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass nicht nur jede reelle Zahl in $\mathbb{C}$ eine Quadratwurzel besitzt, sondern überhaupt jede komplexe Zahl.

Beispiel 8.11. Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann hat die komplexe Zahl

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma \sqrt{|z| + a} + i \sqrt{|z| - a} \right)$$

mit dem Vorzeichen

$$\sigma = \begin{cases} 1, \text{ falls } b \geq 0 \\ -1 \text{ falls } b < 0 \,. \end{cases}$$

die Eigenschaft

$$u^2 = z \,.$$

Insbesondere besitzt also z zwei Quadratwurzeln, nämlich u und $-u$, die bei $z = 0$ zusammenfallen.

Wir zeigen dies für den Fall $b \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} u^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|z| + a} + i \sqrt{|z| - a} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(|z| + a - (|z| - a) + 2i \sqrt{(|z| + a)\,(|z| - a)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2a + 2i \sqrt{|z|^2 - a^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2a + 2i \sqrt{b^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2a + 2ib \right) \\ &= a + bi. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass innerhalb von $\mathbb{C}$ jede *quadratische Gleichung*

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, mindestens eine komplexe Lösung besitzt, siehe Aufgabe 8.17.

Ein wichtiger Satz, der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, dass überhaupt jede polynomiale Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$ besitzt. D.h., dass jedes nichtkonstante Polynom über den komplexen Zahlen

eine Nullstelle besitzt. Diesen Satz können wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht beweisen.

8. Arbeitsblatt

8.1. Übungsaufgaben.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 8.1. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4i)(3 - 2i)$.
(2) $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$.
(3) $(2i + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5i)^{-1}$.
(6) $\frac{4-3i}{2+i}$.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

Aufgabe 8.3. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 8.4. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

Aufgabe 8.5. Skizziere die folgenden Teilmengen.

(1) $\{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}\ (z) \geq -3\}$,
(2) $\{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\ (z) \leq 2\}$,
(3) $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq 5\}$.

Aufgabe 8.6.*

a) Berechne

$$(4 - 7i)(5 + 3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3 + 4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Aufgabe 8.7.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5i)z \;=\; (3-7i)$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 8.8. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + bi \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Aufgabe 8.9. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\,i$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z+w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \;\text{ und }\; \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\;.$$

(5) $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.

Aufgabe 8.10. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 8.11. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) $|\mathrm{Re}\,(z)|\,, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.

Aufgabe 8.12. Zeige, dass eine Folge komplexer Zahlen

$$z_n \;=\; x_n + iy_n$$

genau dann konvergiert, wenn sowohl x_n als auch y_n konvergiert. Für den Grenzwert gilt dabei

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Aufgabe 8.13. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

(2) Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$

(3) Für $c \in \mathbb{C}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$

(4) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$

(5) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Aufgabe 8.14. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.15. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 8.16. Bestätige die in Beispiel 8.11 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + bi$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 8.17. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mindestens eine komplexe Lösung z gibt.

Aufgabe 8.18. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Man charakterisiere, wann es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

genau eine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt und wann zwei Lösungen.

Aufgabe 8.19. Man bestimme die zwei komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 5iz - 3 = 0\,.$$

Der Begriff eines Häufungspunktes lässt sich unmittelbar auf komplexe Folgen erweitern.

Aufgabe 8.20. Bestimme die Häufungspunkte der komplexen Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man gebe für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Punkt konvergiert.

8.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 8.21. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+i)^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 8.22. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8.23. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 8.24. (4 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

Aufgabe 8.25. (5 Punkte)

Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

8.3. **Kollektivaufgabe.**

Aufgabe 8.26. (4 Punkte)

Korrigiere den Wikipediaartikel „Dedekindscher Schnitt“, so dass die beiden Definitionen äquivalent werden.

(Die Bearbeitung muss dauerhaft akzeptiert werden.)

9. Vorlesung - Reihen

9.1. **Reihen.**

Wir haben in der siebten Vorlesung gesagt, dass man eine Dezimalentwicklung, also eine (unendliche) Ziffernfolge mit Ziffern zwischen 0 und 9 als eine wachsende Folge von rationalen Zahlen auffassen kann. Dabei hat die n-te Nachkommastelle a_{-n} die Bedeutung, dass $a_{-n} \cdot 10^{-n}$ zur vorhergehenden Approximation hinzu zu addieren ist. Die Ziffernfolge gibt also direkt die Differenz der Folgenglieder an, und die Folgenglieder ergeben sich durch Aufsummieren dieser Differenzen. Diese Sichtweise führt zum Begriff der Reihe.

Definition 9.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Unter der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert*. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei $k = 0$, sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

Beispiel 9.2. Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

berechnen, wozu wir zuerst eine Formel für die n-te Partialsumme angeben. Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Diese Folge konvergiert gegen 1, so dass die Reihe konvergiert und ihre Summe gleich 1 ist.

Lemma 9.3. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium *erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.3. □

Lemma 9.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.*
(2) *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_n = \lambda a_n$ konvergent mit der Summe λs.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.4. □

Lemma 9.5. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 9.3. □

Es ist also eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie die *harmonische Reihe* zeigt.

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Beispiel 9.6. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

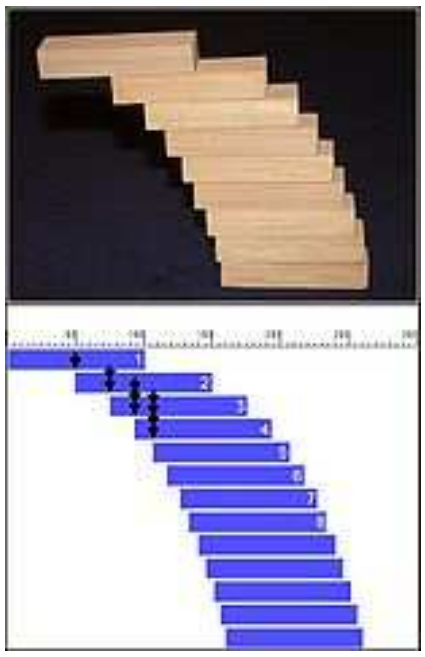
Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \;\geq\; 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 5.8 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Die folgende Aussage heißt *Leibnizkriterium für alternierende Reihen.*

Satz 9.7. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x_k$.*

Beweis. Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k \,.$$

Wir betrachten die Teilfolge mit geradem Index. Für jedes n gilt wegen $x_{2n+2} \leq x_{2n+1}$ die Beziehung

$$s_{2(n+1)} \;=\; s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} \;\leq\; s_{2n},$$

d.h. diese Teilfolge ist fallend. Ebenso ist die Folge der ungeraden Teilsummen wachsend. Es gelten die Abschätzungen

$$s_0 \;\geq\; s_{2n} \;\geq\; s_{2n-1} \;\geq\; s_1.$$

Daher sind die beiden Teilfolgen fallend und nach unten beschränkt bzw. wachsend und nach oben beschränkt, und daher wegen Korollar 7.1 konvergent. Wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = x_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ stimmen die Grenzwerte überein. □

9.2. **Absolute Konvergenz.**

Definition 9.8. Eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

von komplexen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Satz 9.9. *Eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet. □

Beispiel 9.10. Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 9.9 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

und zwar ist ihr Grenzwert ln 2, was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 9.6 divergiert.

Die folgende Aussage heißt das *Majorantenkriterium*.

Satz 9.11. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $|a_k| \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium. □

Beispiel 9.12. Wir wollen bestimmen, ob die Reihe

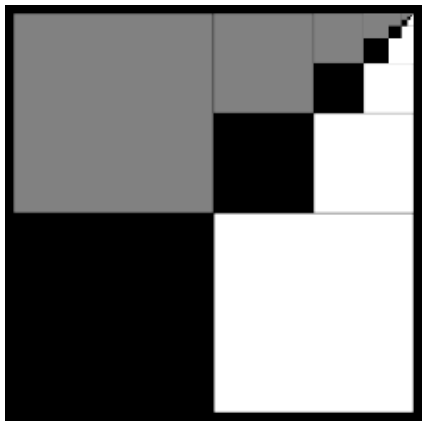
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert oder nicht. Dazu ziehen wir das Majorantenkriterium und Beispiel 9.2 heran, wo wir die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ gezeigt haben. Für $k \geq 2$ ist

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}\,.$$

Daher konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Über den Wert der Summe ist damit noch nichts gesagt. Mit deutlich aufwändigeren Methoden kann man zeigen, dass diese Summe gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

9.3. **Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium.**



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $x = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $z \in \mathbb{C}$, es geht also um die Summe

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots\,.$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von z ab.

Satz 9.13. *Für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\,.$$

Beweis. Für jedes z gilt die Beziehung

$$(z-1)(\sum_{k=0}^{n} z^k) = z^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $z \neq 1$)

$$s_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} z^k \;=\; \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|z| < 1$ konvergiert dies gegen $\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$. □

Die folgende Aussage heißt *Quotientenkriterium.*

Satz 9.14. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von komplexen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (Insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

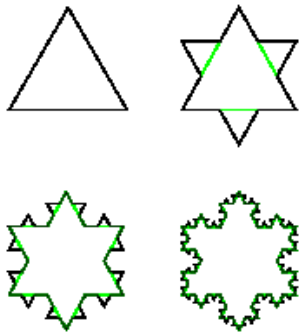
Beweis. Die Konvergenz[10] ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k \;=\; \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \;\leq\; a_0 q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. □

Beispiel 9.15. Unter den *Kochschen Schneeflocken* versteht man die Folge K_n der folgendermaßen rekursiv definierten ebenen Figuren: Die Ausgangsfigur K_0 ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur K_{n+1} entsteht aus K_n, indem man in jeder Begrenzungskante von K_n das mittlere Drittel durch die beiden Schenkel eines darauf aufgesetzten nach außen gerichteten gleichmäßigen Dreiecks ersetzt.

[10] Wohl aber die Summe.



Es sei A_n der Flächeninhalt und L_n die Länge des Randes der n-ten Kochschen Schneeflocke. Wir wollen zeigen, dass die Folge A_n konvergiert und die Folge L_n bestimmt gegen ∞ divergiert.

Die Anzahl der Kanten von K_n ist $3 \cdot 4^n$, da bei jedem Unterteilungsschritt eine Kante durch vier Kanten ersetzt wird, deren Länge $1/3$ der Länge der Vorgängerkante ist. Es sei r die Seitenlänge des gleichseitigen Ausgangsdreiecks. Dann besteht K_n aus $3 \cdot 4^n$ Kanten der Länge $r\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und die Gesamtlänge der Kanten von K_n ist gleich

$$L_n \;=\; 3 \cdot 4^n r \left(\frac{1}{3}\right)^n \;=\; 3r \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Wegen $\left(\frac{4}{3}\right) > 1$ divergiert dies gegen ∞.

Beim Übergang von K_n nach K_{n+1} kommt für jede Kante ein neues Dreieck mit gedrittelter Seitenlänge hinzu. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (Grundseite mal Höhe durch 2). Im Schritt von K_n nach K_{n+1} kommen somit $3 \cdot 4^n$ Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$ hinzu. Daher ist der Gesamtflächeninhalt von K_n gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(1 + 3\frac{1}{9} + 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \\ = \;& \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Wenn wir hinten die erste 1 und den Faktor $\frac{3}{4}$ ignorieren, was die Konvergenzeigenschaft nicht ändert, so steht in der Klammer die Partialsumme einer geometrischen Reihe zu $\frac{4}{9}$, welche konvergiert.

9. Arbeitsblatt

Aufgabe 9.1. Zeige, dass bei einer Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

Aufgabe 9.2. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Aufgabe 9.3. Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen komplexer Zahlen.

Aufgabe 9.4. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = \lambda a_k$ konvergent mit der Summe λs.

Aufgabe 9.5. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeeherausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 9.6. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen?

Aufgabe 9.7. Sei z eine komplexe Zahl, $z \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}\,.$$

Aufgabe 9.8. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wieviel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

Aufgabe 9.9. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.10.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\, n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.11.*

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 5}{4n^3 - 3n + 2}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 9.12. Beweise das folgende *Minorantenkriterium.*

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgabe 9.13. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 9.14. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 9.15. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

9.1. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 9.16. (2 Punkte)
Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \,.$$

Aufgabe 9.17. (3 Punkte)
Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\, i \leq k \,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe[11]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i \,.$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

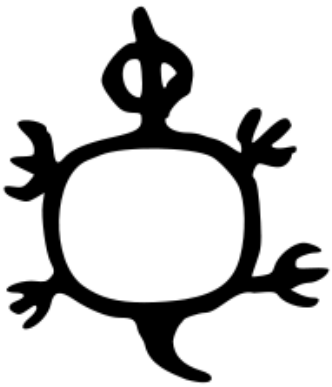
[11]Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.

Aufgabe 9.18. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert.



Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

10. Vorlesung - Abzählbarkeit

10.1. **Mächtigkeiten.**

Zwei Kinder, die noch nicht zählen können, sitzen im Sandkasten und wollen wissen, wer von ihnen mehr Buddelsachen dabei hat. Sie lösen das Problem, indem beide gleichzeitig je eine Sache aus ihrem Besitz aus dem Sandkasten hinauswerfen, und dies so lange wiederholen, bis ein Kind keine Sachen mehr

im Sandkasten hat. Wenn das andere Kind noch Sachen übrig hat, so hat dieses insgesamt mehr Buddelsachen, anderfalls haben sie gleichviel. Dies ist die Grundidee für den Begriff der gleichmächtigen Menge.

Definition 10.1. Zwei Mengen L und M heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\varphi\colon\ L \longrightarrow M$$

gibt.

Lemma 10.2. *Es seien M und N zwei Mengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *N ist leer oder es gibt eine surjektive Abbildung*

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N.$$

(2) *Es gibt eine injektive Abbildung*

$$\psi\colon\ N \longrightarrow M.$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Wenn N leer ist, so kann man die leere Abbildung $\emptyset \to M$ nehmen. Sei also $N \neq \emptyset$ und sei

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

surjektiv. Zu jedem $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $\varphi(x) = y$. Wir wählen für jedes y ein solches x_y aus und definieren ψ durch

$$\psi\colon\ N \longrightarrow M,\ y \longmapsto \psi(y) = x_y.$$

Wegen $\varphi(\psi(y)) = y$ ist ψ injektiv.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei nun eine injektive Abbildung

$$\psi\colon\ N \longrightarrow M$$

gegeben. Diese induziert eine Bijektion zwischen N und dem Bild von ψ, sei $\theta\colon\ N \to \operatorname{bild}\psi$ diese Abbildung. Wenn N leer ist, so sind wir fertig. Sei also $N \neq \emptyset$ und sei $c \in N$ ein fixiertes Element. Wir definieren

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta^{-1}(x), & \text{falls } x \in \operatorname{bild}\psi\,, \\ c \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wegen $\varphi(\theta(y)) = y$ surjektiv. $\square$

10.2. **Endliche Mengen.**

Definition 10.3. Eine Menge M heißt *endlich* mit m Elementen, wenn es eine Bijektion

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

gibt.

Die natürliche Zahl m ist dabei nach Aufgabe 2.5 eindeutig bestimmt und heißt die *Anzahl* (oder die *Kardinalität*) der Menge. Sie wird mit $\#(M)$ oder mit $|M|$ bezeichnet. Die bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

kann man eine *Nummerierung* der Menge M nennen. Eine Menge besitzt also n Elemente, wenn man sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Zwei endliche Mengen M und N, für die es eine Bijektion

$$M \longrightarrow N$$

gibt, besitzen die gleiche Anzahl. Dies beruht einfach darauf, dass diese Bijektion verknüpft mit der bijektiven Nummerierung wieder eine Bijektion ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, für die es also keine Bijektion mit $\{1, \ldots, n\}$ für kein n gibt, heißt *unendlich*.

Lemma 10.4. *Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und N eine endliche Menge mit n Elementen. Es sei $m > n$. Dann gibt es keine injektive Abbildung*

$$M \longrightarrow N.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine injektive Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N$$

gibt. Es sei $T = \varphi(M) \subseteq N$ das Bild von M unter der Abbildung φ. Dann ergibt sich eine Bijektion

$$\tilde{\varphi}\colon\ M \longrightarrow T,$$

da sich die Injektivität überträgt und da eine Abbildung immer surjektiv auf ihr Bild ist. Daher haben M und T gleich viele Elemente. Nach Aufgabe 11.1 ist die Anzahl einer Teilmenge stets kleiner oder gleich der Anzahl der Menge. Also ist $m \leq n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Die vorstehende Aussage heißt *Schubfachprinzip* (oder *Taubenschlagprinzip*). Es besagt, dass wenn man m Tauben auf n Plätze verteilt mit $m > n$, dass dann in mindestens einem Platz mindestens zwei Tauben landen.

Lemma 10.5. *Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Dann sind für eine Abbildung*

$$F\colon\ M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent.

Beweis. Siehe Aufgabe 11.3. □

10.3. **Abzählbare Mengen.**

Durch den Mächtigkeitsbegriff wird eine Hierarchie auch in die Welt der unendlichen Mengen gebracht. Die zu den natürlichen Zahlen gleichmächtigen Mengen sind die „kleinsten“ unendlichen Mengen. Dies sind die sogenannten „abzählbar unendlichen“ Mengen.

Definition 10.6. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.

Nicht abzählbare Mengen nennt man im Allgemeinen *überabzählbar*. Aufgrund von Lemma 10.2 ist die Abzählbarkeit von M gleichbedeutend damit, dass es eine injektive Abbildung $M \to \mathbb{N}$ gibt. Beim Nachweis der Abzählbarkeit arbeitet man aber meistens mit der oben angegebenen Definition.

Endliche Mengen sind natürlich abzählbar. Die natürlichen Zahlen sind abzählbar unendlich.

Definition 10.7. Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie abzählbar, aber nicht endlich ist.

Lemma 10.8. *Eine Menge M ist genau dann abzählbar unendlich, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und M gibt.*

Beweis. Es sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung. Wir definieren induktiv eine streng wachsende Abbildung

$$\psi\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass $\varphi \circ \psi$ bijektiv ist. Wir setzen $\psi(0) = 0$ und konstruieren ψ induktiv über die Eigenschaft, dass $\psi(n+1)$ die kleinste natürliche Zahl k ist, für die $\varphi(k)$ nicht zu

$$\{\varphi(\psi(0)), \varphi(\psi(1)), \ldots, \varphi(\psi(n))\}$$

gehört. Eine solche Zahl gibt es immer, da andernfalls M endlich wäre; also gibt es auch eine kleinste solche Zahl. Nach Konstruktion ist $\psi(n+1) > \psi(n)$, d.h. ψ ist streng wachsend. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft

$$\varphi(\psi(n+1)) \notin \{\varphi(\psi(0)), \varphi(\psi(1)), \ldots, \varphi(\psi(n))\}$$

erfüllt, ist die Gesamtabbildung $\varphi \circ \psi$ injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität sei $m \in M$. Wegen der Surjektivität von φ ist die Faser (also die Urbildmenge zu diesem Element) $\varphi^{-1}(m)$ nicht leer und daher gibt es auch ein kleinstes Element $a \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(a) = m$. Da ψ streng wachsend ist, gibt es nur endlich viele Zahlen $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $\psi(i) < a$. Daher ist $\psi(n+1) = a$ und $\varphi(\psi(n+1)) = \varphi(a) = m$. □

D.h. insbesondere, dass alle abzählbar unendlichen Mengen gleichmächtig sind.

Lemma 10.9. *Seien M_1 und M_2 abzählbare Mengen. Dann ist auch die Produktmenge $M_1 \times M_2$ abzählbar. Insbesondere ist das Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.*

Beweis. Wir beweisen zuerst den Zusatz. Die Abbildung

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (k, \ell) \longmapsto 2^k(2\ell + 1),$$

ist injektiv, da für jede positive natürliche Zahl n die Zweierpotenz 2^k, die sie teilt, und der ungerade komplementäre Teiler eindeutig bestimmt sind (das Bild der Abbildung ist $\mathbb{N}_+$). Daher ist die Produktmenge nach Lemma 10.2 abzählbar. Für den allgemeinen Fall seien abzählbare Mengen M_1 und M_2 gegeben. Wenn eine davon leer ist, so ist auch die Produktmenge leer und somit abzählbar. Seien also M_1 und M_2 nicht leer und seien $\varphi_1 : \mathbb{N} \to M_1$ und $\varphi_2 : \mathbb{N} \to M_2$ zwei surjektive Abbildungen. Dann ist auch die Produktabbildung

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2\colon\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow M_1 \times M_2$$

surjektiv. Nach der Vorüberlegung gibt es eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

so dass es insgesamt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M_1 \times M_2$ gibt. □

Lemma 10.10. *Es sei I eine abzählbare Indexmenge und zu jedem $i \in I$ sei M_i eine abzählbare Menge. Dann ist auch die (disjunkte) Vereinigung*[12] $\bigcup_{i \in I} M_i$ *abzählbar.*

Beweis. Wir können annehmen, dass sämtliche M_i nicht leer sind. Es gibt dann surjektive Abbildungen

$$\varphi_i \colon \mathbb{N} \longrightarrow M_i.$$

Daraus konstruieren wir die Abbildung

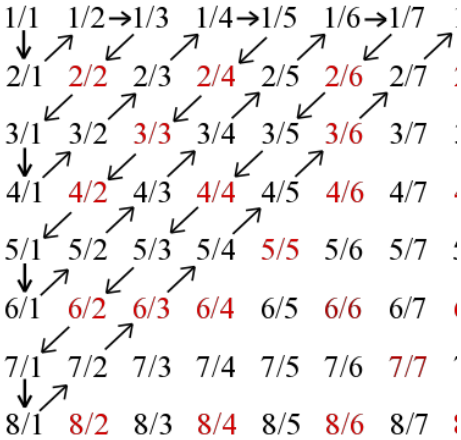
$$\varphi \colon I \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i,\ (i,n) \longmapsto \varphi_i(n),$$

die offensichtlich surjektiv ist. Nach Lemma 10.9 ist die Produktmenge $I \times \mathbb{N}$ abzählbar, also gilt das auch für das Bild unter φ, und dieses ist die Vereinigung. □

Wir ziehen einige wichtige Konsequenzen über die Abzählbarkeit von Zahlbereichen. Man beachte, dass die natürlichen Inklusionen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ nicht bijektiv sind. Die Bijektionen, die es zwischen $\mathbb{N}$ einerseits und $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ andererseits aufgrund der folgenden Aussagen gibt, respektieren nicht die Rechenoperationen.

Lemma 10.11. *Die Menge der ganzen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.4. □



Die Abzählbarkeit der positiven rationalen Zahlen.

[12] Wenn die M_i Teilmengen einer festen Obermenge sind, so ist die Vereinigung in dieser Menge zu nehmen und im Allgemeinen nicht disjunkt. Wenn es sich um Mengen handelt, die nichts miteinander zu tum haben, so ist mit Vereinigung die disjunkte Vereinigung gemeint.

Satz 10.12. *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.5. □

10.4. **Die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.**

Satz 10.13. *Die Menge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Nehmen wir an, die Menge der reellen Zahlen sei abzählbar, dann ist insbesondere auch das Einheitsintervall $[0,1[$ abzählbar. Sei also

$$\psi\colon\ \mathbb{N}_+ \longrightarrow [0,1[$$

eine surjektive Abbildung. Wir betrachten die reellen Zahlen als Ziffernfolgen im Dreiersystem: Jede reelle Zahl $r \in [0,1[$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung als Reihe

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(r) 3^{-k}\,,$$

wobei die k-te Nachkommaziffer $z_k(r) \in \{0,1,2\}$ ist und wobei nicht fast alle (das bedeutet alle bis auf endlich viele) Ziffern gleich 2 sind (sonst hätte man keine Eindeutigkeit). Wir definieren nun eine reelle Zahl durch $s = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k}$ mit

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } (\psi(k))_k = 1 \text{ oder } 2 \\ 1, & \text{falls } (\psi(k))_k = 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Zahl s nicht in der Aufzählung ψ vorkommt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\psi(k) \neq s$, da $\psi(k)$ sich nach Konstruktion von s an der k-ten Nachkommastelle unterscheidet. Also ist ψ doch nicht surjektiv. □

Bemerkung 10.14. Ist jede überabzählbare Menge $T \subseteq \mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$? Die *Kontinuumshypothese* behauptet, dass dies gilt. Diese Frage berührt die mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik; es hängt nämlich von der gewählten Mengenlehre ab, ob dies gilt oder nicht, man kann es sich also aussuchen. Anders als beim *Auswahlaxiom*, ohne dessen Akzeptanz eine Vielzahl von mathematischen Schlüssen nicht möglich wäre und die Mathematik ziemlich anders aussehen wüde, ist es für praktische Zwecke unerheblich, wofür man sich entscheidet.

Kurt Gödel bewies 1938, dass die Hinzunahme der Kontinuumshypothese zur Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre einschließlich Auswahlaxiom (ZFC) diese nicht widersprüchlich macht. Man kann aber nicht beweisen, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Auch das hat Gödel bewiesen.

Mit einem ähnlichen (Diagonal)-Argument wie im Beweis zu Satz 10.13 kann man zeigen, dass die Potenzmenge einer Menge stets eine größere Mächtigkeit als die Menge besitzt.

Satz 10.15. *Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Dann besitzt $\mathfrak{P}(M)$ eine größere Mächtigkeit als M.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung

$$F\colon\ M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto F(x),$$

gibt, und müssen dies zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir

$$T = \{x \in M \,|\, x \notin F(x)\}\ .$$

Da dies eine Teilmenge von M ist, muss es wegen der Surjektivität ein $y \in M$ geben mit

$$F(y) = T\,.$$

Es gibt nun zwei Fälle, nämlich $y \in F(y)$ oder $y \notin F(y)$. Im ersten Fall ist also $y \in T$, und damit, nach der Definition von T, auch $y \notin F(y)$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist, wieder aufgrund der Definition von T, $y \in T$, und das ist ebenfalls ein Widerspruch. □

10. Arbeitsblatt

10.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 10.1. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 10.2. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Aufgabe 10.3.*

Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Zeige, dass für eine Abbildung

$$F\colon\ M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent sind.

Aufgabe 10.4. Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 10.5. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 10.6. Zeige, dass die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar ist.

Aufgabe 10.7. Nehmen wir an, dass auf der Erde abzählbar unendlich viele Menschen leben würden, und dass jeder Mensch genau einen Euro besitzt. Finde eine „Umverteilungsvorschrift“, die jeden Menschen zu einem Euro-Milliardär macht.

Aufgabe 10.8. Der Barbier von Sevilla behauptet, dass er genau diejenigen Bürger von Sevilla rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Weise nach, dass er lügt.

Aufgabe 10.9. Zeige, dass die Potenzmenge einer Menge niemals abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 10.10. Zeige, dass die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 10.11. Wir nennen eine reelle Zahl *adressierbar*, wenn es einen endlichen Text (über einem fixierten endlichen Alphabet, das aus mathematischen oder sonstigen Symbolen besteht) gibt, der diese Zahl eindeutig beschreibt. Ist die Menge dieser Zahlen abzählbar? Was ergibt sich, wenn man das Diagonalargument aus dem Beweis zu Satz 10.13 anwendet?

10.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 10.12. (3 Punkte)

Es sei M eine abzählbare Menge. Zeige, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von M abzählbar ist.

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Aufgabe 10.14. (4 Punkte)

Man gebe eine Folge rationaler Zahlen derart an, dass jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge ist.

11. Vorlesung - Polynome

Nachdem wir das Grenzwertverhalten von Folgen und Reihen für die beiden Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zur Verfügung haben, wenden wir uns in den nächsten Vorlesungen dem Grenzwertverhalten von Funktionen zu. Die einfachsten Funktionen (abgesehen von den linearen Funktionen, die in der linearen Algebra im Mittelpunkt stehen) sind die Polynomfunktionen.

11.1. **Der Polynomring über einem Körper.**

Definition 11.1. Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

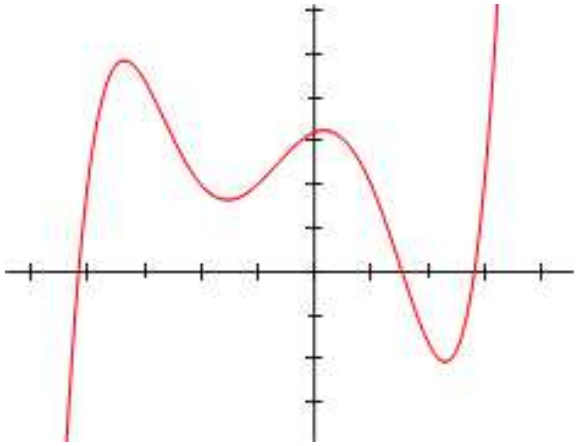
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

Ein Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ ist formal gesehen nichts anderes als das Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, die die *Koeffizienten* des Polynoms heißen. Der Körper K heißt in diesem Zusammenhang der *Grundkörper* des Polynomrings. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition liegt unmittelbar eine Gruppe vor, mit dem *Nullpolynom* (bei dem alle Koeffizienten null sind) als neutralem Element. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0.

Die für ein einfaches Tupel zunächst ungewöhnliche Schreibweise deutet in suggestiver Weise an, wie die Multiplikation aussehen soll, das Produkt $X^n \cdot X^m$ ist nämlich durch die Addition der Exponenten gegeben. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings. Für beliebige Polynome ergibt sich die Multiplikation aus dieser einfachen Multiplikationsbedingung durch distributive Fortsetzung gemäß der Vorschrift, „alles mit allem“ zu multiplizieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_jX^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_rb_{k-r}\,.$$



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Definition 11.2. Der *Grad* eines von 0 verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms. Der Ausdruck a_nX^n heißt *Leitterm*.

11.2. **Division mit Rest.**

Satz 11.3. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(T) = 0$ und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \cdots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P - TH \\ &= 0X^n + (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1})X^{n-1} + \cdots \\ &\quad +(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \cdots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P \;=\; P' + TH \;=\; TQ' + TH + R' \;=\; T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$

besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. □

Der Beweis des Satzes ist konstruktiv, d.h. es wird in ihm ein Verfahren beschrieben, mit der man die Division mit Rest berechnen kann. Dazu muss man die Rechenoperationen des Grundkörpers beherrschen. Wir geben dazu zwei Beispiele, eines über den rationalen Zahlen und eines über den komplexen Zahlen.

Beispiel 11.4. Wir führen die Polynomdivision

$$P = 6X^3 + X + 1 \text{ durch } T = 3X^2 + 2X - 4$$

durch. Es wir also ein Polynom vom Grad 3 durch ein Polynom vom Grad 2 dividiert, d.h. dass der Quotient und auch der Rest (maximal) vom Grad 1 sind. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar $2X$. Das Produkt ist

$$2X\left(3X^2 + 2X - 4\right) = 6X^3 + 4X^2 - 8X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$6X^3 + X + 1 - \left(6X^3 + 4X^2 - 8X\right) = -4X^2 + 9X + 1.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P', setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit $\frac{-4}{3}$ multiplizieren. Dies ergibt

$$-\frac{4}{3}T = -\frac{4}{3}\left(3X^2 + 2X - 4\right) = -4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$-4X^2 + 9X + 1 - \left(-4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}\right) = \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$6X^3 + X + 1 = \left(3X^2 + 2X - 4\right)\left(2X - \frac{4}{3}\right) + \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Beispiel 11.5. Wir führen die Polynomdivision

$$P = (4 + 3i)X^3 + X^2 + 5i \text{ durch } T = (1 + i)X^2 + X - 3 + 2i$$

aus. Das Inverse zu $1 + i$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und daher ist

$$\begin{aligned}(4 + 3i)(1 + i)^{-1} &= (4 + 3i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2 + \frac{3}{2} - 2i + \frac{3}{2}i \\ &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Daher beginnt Q mit $\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X$ und es ist

$$\begin{aligned}&((1+i)X^2+X-3+2i)\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X\\ =\;&(4+3i)X^3+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-\frac{19}{2}+\frac{17}{2}i\right)X.\end{aligned}$$

Dies muss man nun von P abziehen und erhält

$$\begin{aligned}&P-\left((4+3i)X^3+\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-\frac{19}{2}+\frac{17}{2}i\right)X\right)\\ =\;&\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(\frac{19}{2}-\frac{17}{2}i\right)X+5i.\end{aligned}$$

Auf dieses Polynom (nennen wir es P') wird das gleiche Verfahren angewendet. Man berechnet

$$\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) \;=\; -1+\frac{3}{2}i.$$

Daher ist der konstante Term von Q gleich $-1+\frac{3}{2}i$ und es ergibt sich

$$((1+i)X^2+X-3+2i)\left(-1+\frac{3}{2}i\right) \;=\; \left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-1+\frac{3}{2}i\right)X-\frac{13}{2}i.$$

Dies ziehen wir von P' ab und erhalten

$$P'-\left(\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)X^2+\left(-1+\frac{3}{2}i\right)X-\frac{13}{2}i\right) \;=\; \left(\frac{21}{2}-10i\right)X+\frac{23}{2}i.$$

Dies ist der Rest R, die vollständige Division mit Rest ist also

$$\begin{aligned}&(4+3i)X^3+X^2+5i\\ =\;&((1+i)X^2+X-3+2i)\left(\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i\right)X-1+\frac{3}{2}i\right)\\ &+\left(\frac{21}{2}-10i\right)X+\frac{23}{2}i.\end{aligned}$$

11.3. **Nullstellen.**

Unter einer Nullstelle eines Polynoms P versteht man ein $a\in K$ mit $P(a)=0$. Ein Polynom muss keine Nullstellen besitzen, ferner hängt dies vom Grundkörper ab. Das Polynom X^2+1 hat keine reelle Nullstelle, dagegen gibt es die komplexen Nullstellen i und $-i$. Als Element in $\mathbb{R}[X]$ kann man X^2+1 nicht als Produkt von einfacheren Polynomen schreiben, in $\mathbb{C}[X]$ hingegen hat man die Zerlegung $X^2+1=(X-i)(X+i)$.

Lemma 11.6. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P\in K[X]$ ein Polynom und $a\in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X-a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X-a$ ist, so kann man

$$P=(X-a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a)=(a-a)Q(a)=0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P=(X-a)Q+R\,,$$

wobei $R=0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a)=R\,.$$

Wenn also $P(a)=0$ ist, so muss der Rest $R=0$ sein, und das bedeutet, dass $P=(X-a)Q$ ist. □

Korollar 11.7. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P\in K[X]$ ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d=0,1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d\geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P=Q(X-a)$ nach Lemma 11.6 und Q hat den Grad $d-1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d-1$ Nullstellen. Für $b\in K$ gilt $P(b)=Q(b)(b-a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

Satz 11.8. *Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1,\ldots,a_n\in K$ und n Elemente $b_1,\ldots,b_n\in K$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $P\in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i)=b_i$ für alle i ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.11. □

11.4. **Rationale Funktionen.**

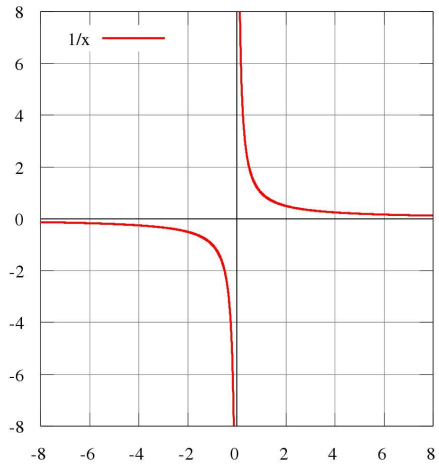
Die nach den Polynomfunktionen einfachsten Funktionen sind die rationalen Funktionen.

Definition 11.9. Zu zwei Polynomen $P,Q\in K[X]$, $Q\neq 0$, heißt die Funktion

$$D\longrightarrow K,\, z\longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $D\subseteq K$ das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion.*

Für uns ist der Fall $K = \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$ wichtig.



Man kann Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graph der rationalen Funktion $1/X$.

Der Polynomring $K[X]$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Man kann aber mit Hilfe der rationalen Funktionen einen Körper konstruieren, der den Polynomring enthält, ähnlich wie man aus $\mathbb{Z}$ die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren kann. Dazu definiert man

$$K(T) := \left\{ \frac{P}{Q} | \, P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\} ,$$

wobei man wieder zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ miteinander identifiziert, wenn $PQ' = P'Q$ ist. Auf diese Weise entsteht der *Körper der rationalen Funktionen* (über K).

11. Arbeitsblatt

11.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 11.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i) .$$

Aufgabe 11.2. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 11.3. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon\ K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 11.4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 11.5. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 11.6. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 11.7.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Aufgabe 11.8. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 11.9. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 11.10. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Aufgabe 11.11. Es sei K ein Körper und seien $S, Q \in K[X]$ zwei Polynome mit $\operatorname{grad}(Q) \geq 1$. Zeige, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine eindeutige Darstellung

$$S = R_0 + R_1 Q + R_2 Q^2 + \cdots + R_n Q^n$$

mit Polynomen R_j vom Grad $< \operatorname{grad}(Q)$ gibt.

Aufgabe 11.12. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 11.13. Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ gibt derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Aufgabe 11.14.*

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 11.15. Zeige durch Induktion, dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 11.16. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen a, n mit $a > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Aufgabe 11.17. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} | \, P, Q \in K[X], \, Q \neq 0 \right\} ,$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 11.18. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 11.19. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4} .$$

In einer der Aufgaben wird folgender Begriff verwendet.

Eine reelle Zahl z heißt *algebraisch* oder *algebraische Zahl*, wenn es ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, $P \neq 0$, mit $P(z) = 0$ gibt. Andernfalls heißt sie *transzendent*.

Beispielsweise sind rationale Zahlen und Wurzeln aus rationalen Zahlen algebraisch, dagegen sind e und π transzendent (das sind schwierige Sätze).

11.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 11.20. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i) .$$

Aufgabe 11.21. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 11.22. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 11.23. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei

$$P = \{F \in K[X] | \text{ Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\} .$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

(1) Entweder $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 11.24. (6 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 11.23, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 11.25. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Polynome in einer Variablen mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist.

Aufgabe 11.26. (3 Punkte)

Zeige, dass die Menge der reellen transzendenten Zahlen überabzählbar ist.

12. Vorlesung - Stetigkeit

12.1. **Stetige Funktionen.**

Den Abstand zwischen zwei reellen (oder komplexen) Zahlen x und x' bezeichnen wir mit $d(x, x') := |x - x'|$.

Bei einer Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe“ an $f(x)$ sind. Schon lineare Funktionen mit unterschiedlicher Steigung zeigen, dass die „Nähe“ im Bildbereich nicht mit der „Nähe“ im Definitionsbereich direkt verglichen weden kann. Die Zielsetzung ist vielmehr, dass es zu einer gewünschten Genauigkeit im Bildbereich überhaupt eine Ausgangsgenauigkeit gefunden werden kann, die sichert, dass die Funktionswerte innerhalb der gewünschten Genauigkeit beieinander liegen.

Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung, den wir parallel für die reellen und die komplexen Zahlen entwickeln. Wir verwenden für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ das gemeinsames Symbol $\mathbb{K}$ und wir betrachten Funktionen

$$\varphi\colon\ T \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ könnte man sich auf $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ beschränken. Allerdings ist die reelle Situation etwas suggestiver und viele komplexe Fragestellungen lassen sich einfach auf den reellen Fall zurückführen, so dass es durchaus erlaubt ist, sich zunächst auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu beschränken.

Definition 12.1. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon\ T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in T$ stetig ist.

Bei T sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass T ganz $\mathbb{K}$ ist, oder ein reelles Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den nichnegativen reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ arbeiten.

Beispiel 12.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegeben ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x),f(x')) \ = \ d(c,c) \ = \ 0 \ \leq \ \epsilon$$

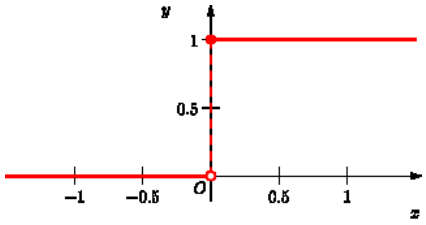
gilt.

Die Identität

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto x,$$

ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ und kann man hier $\delta = \epsilon$ wählen, was zu der Tautologie führt: Wenn $d(x,x') \leq \delta = \epsilon$, so ist

$$d(f(x),f(x')) \ = \ d(x,x') \ \leq \ \epsilon.$$



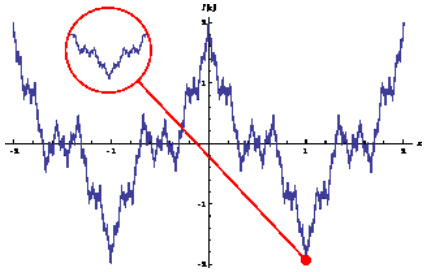
Beispiel 12.3. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x < 0\,, \\ 1 \text{ falls } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0,x') = |x'| \leq \delta$. Für diese ist aber $d(f(0),f(x')) = d(1,0) = 1 \not\leq \frac{1}{2}$.



Nicht jede stetige Funktion kann man zeichnen, auch nicht nach beliebiger Vergrößerung. Gezeigt wird eine Approximation einer Weierstraß-Funktion, die stetig ist, aber nirgendwo differenzierbar. Bei einer stetigen Funktion kann man zwar die Größe der Schwankungen im Bildbereich durch Einschränkungen im Definitionsbereich kontrollieren, die Anzahl der Schwankungen (die Anzahl der Richtungswechsel des Graphen) kann man aber nicht kontrollieren.

Die folgende Aussage bringt die Stetigkeit mit konvergenten Folgen in Verbindung.

Lemma 12.4. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in T$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in T$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). □

12.2. **Rechenregeln für stetige Funktionen.**

Lemma 12.5. *Es seien $S \subseteq \mathbb{K}$ und $T \subseteq \mathbb{K}$ Teilmengen und*

$$f\colon\, S \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g\colon\, T \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(S) \subseteq T$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in $x \in S$ und g in $f(x)$ stetig ist, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
(2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Lemma 12.6. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ und seien*

$$f, g\colon\, T \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g\colon\, T \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g\colon\, T \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g\colon\, T \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq T$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g\colon\ U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Satz 8.10. □

Korollar 12.7. *Polynomfunktionen*

$$P\colon\ \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Beispiel 12.2 und Lemma 12.6 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto x^n,$$

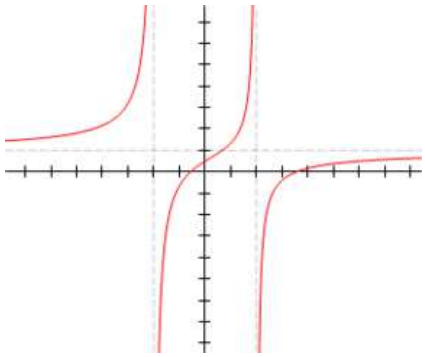
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{K}$ die Funktionen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 12.6 sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 12.8. *Es seien $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ zwei Polynome und es sei $U := \{x \in \mathbb{K} |\, Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 12.7 und Lemma 12.6. □

12.3. **Grenzwerte von Funktionen.**

Eng verwandt mit dem Stetigkeitsbegriff ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion.

Definition 12.9. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{K}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

Dieser Begriff ist eigentlich nur dann sinnvoll, wenn es überhaupt Folgen in T gibt, die gegen a konvergieren. Dann heißt a ein *Berührpunkt* von T. In diesem Fall ist der Grenzwert, wenn er existiert, eindeutig bestimmt (andernfalls ist jeder Punkt ein Grenzwert).

Eine typische Situation ist die folgende: Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ sei ein Punkt darin und es sei $T = I \setminus \{a\}$. Die Funktion sei auf T, aber nicht im Punkt a definiert, und es geht um die Frage, inwiefern man f zu einer sinnvollen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz I fortsetzen kann. Dabei soll $\tilde{f}(a)$ durch f bestimmt sein. In Zusammenhang mit differenzierbaren Funktionen werden wir zu einer Funktion g im Punkt a die Steigung der Sekanten untersuchen, die durch $(a, g(a))$ und $(x, g(x))$, $x \neq a$, festgelegt sind. Diese Steigung ist durch $f(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ gegeben, wobei dieser Ausdruck für $x = a$ nicht definiert ist. Der Grenzwert davon für $x \to a$ ist, falls er existiert, die Steigung der Tangente.

Lemma 12.10. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es seien $f\colon T \to \mathbb{K}$ und $g\colon T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 8.10. □

Beispiel 12.11. Wir betrachten den Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\,,$$

wobei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \geq -4$, ist. Für $x = 0$ ist der Ausdruck nicht definiert, und aus dem Ausdruck ist nicht direkt ablesbar, ob der Grenzwert existiert und welchen Wert er annimmt. Man kann den Ausdruck aber mit $\sqrt{x+4}+2$ erweitern, und erhält dann

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte können wir den Grenzwert von Zähler und Nenner ausrechnen, und es ergibt sich insgesamt $1/4$.

Lemma 12.12. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist*
$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$
(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),b) \leq \epsilon$ folgt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.14. □

Korollar 12.13. *Es sei $S \subseteq \mathbb{K}$, $a \in S$ und $T = S \setminus \{a\}$. Es sei $f\colon S \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Funktion f ist stetig in a.*
(2) *Es ist*
$$\lim_{x\in T} f(x) = f(a)\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Lemma 12.12 oder aus dem Folgenkriterium. □

Für eine stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{K}$ folgt daraus, dass sie sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}\colon T \cup \{a\} \to \mathbb{K}$ (durch $\tilde{f}(a) = b$) genau dann fortsetzen lässt, wenn der Limes von f in a gleich b ist.

12. Arbeitsblatt

12.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 12.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.2. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Die folgende Aufgabe verwendet die reelle Sinusfunktion, die wir später einführen werden. Im Moment muss man nur wissen, dass sie stetig und periodisch ist und dass sich ihre Werte zwischen -1 und 1 bewegen.

Aufgabe 12.4. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichenbar“?

Aufgabe 12.5. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle y aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x-a, x+a[$ gilt.

Aufgabe 12.6. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 12.7. Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1 \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2 \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2 \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 12.8.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Aufgabe 12.9. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 12.10. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 12.11. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R} \, .$$

Die Funktion

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei durch

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n \text{ und } f(0) = x$$

festgelegt. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn die Folge gegen x konvergiert.

Die nächsten beiden Aufgaben verwenden folgende Definition.

Es seien L und M Mengen und es sei

$$f \colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $S \subseteq L$ heißt die Abbildung

$$S \longrightarrow M, \, x \longmapsto f(x),$$

die *Einschränkung der Abbildung* auf die Teilmenge S.

Die Einschränkung wird mit $f|_S$ bezeichnet.

Aufgabe 12.12. Es seien $S \subseteq T \subseteq \mathbb{K}$ Teilmengen. Zeige, dass zu einer stetigen Funktion

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

auch die Einschränkung $f|_S$ stetig ist.

Aufgabe 12.13. Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass es keine (endliche) Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ des Intervalls $[0,1]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{]a_{i-1},a_i]}$ stetig sind.

Aufgabe 12.14. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{K}$ ein Punkt. Es sei $f \colon T \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{K}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \, .$$
(2) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),b) \leq \epsilon$ folgt.

Aufgabe 12.15. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{2x^3+3x^2-1}{x^3-x^2+x+3}$$

im Punkt $a=-1$.

Aufgabe 12.16. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Definiere die Begriffe „linksseitiger“ und „rechtsseitiger Grenzwert“ von f in a sowie den Begriff „Sprungstelle“.

12.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 12.17. (3 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3-5n^2+7}{4n^3+2n-1}$$

ist.

Aufgabe 12.18. (3 Punkte)
Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 12.19. (3 Punkte)
Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{\frac{2\sqrt{n}-3}{3\sqrt{n}-2}}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 12.20. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g + h$$

mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

Aufgabe 12.21. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen Funktionen

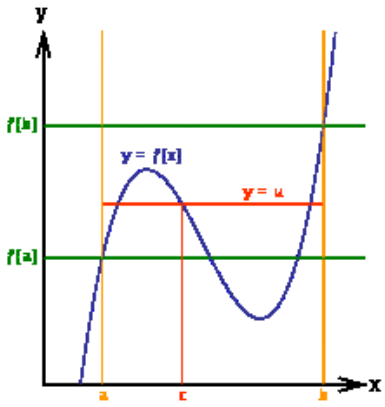
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.

13. Vorlesung - Zwischenwertsatz

13.1. **Der Zwischenwertsatz.**

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall passiert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass das Bild wieder ein Intervall ist.



Satz 13.1. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = u$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0)\,.$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$. □

Die in diesem Beweis beschriebene Methode ist konstruktiv und kann zu einem expliziten Verfahren ausgebaut werden.

Korollar 13.2. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 13.1. □

Beispiel 13.3. Die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in $\mathbb{Q}$ keine Lösung gibt.

Mit der im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendeten Intervallhalbierungsmethode kann man insbesondere auch Quadratwurzeln „ausrechnen“, also Folgen angeben, die gegen die Quadratwurzel konvergieren. Die Konvergenzgeschwindigkeit beim babylonischen Wurzelziehen ist aber deutlich höher.

Korollar 13.4. *Es sei I ein reelles Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch das Bild $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Sei $J = f(I)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt sofort, dass wenn $y, z \in J$ sind und $u \in \mathbb{R}$ mit $y \leq u \leq z$ gegeben ist, auch $u \in J$ sein muss. Nach Aufgabe 6.10 ist J ein Intervall. □

13.2. **Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion.**

Für eine bijektive stetige Funktion auf einem reellen Intervall ist die Umkehrabbildung wieder stetig. Dies ist keineswegs selbstverständlich.

Satz 13.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J := f(I) = \{f(x) |\, x \in I\}$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon\ J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Korollar 13.4. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f\colon\ I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon\ J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g := f^{-1}$ und $y := f(x)$ vorgegeben. Es sei zunächst y kein Randpunkt von J. Dann ist auch x kein Randpunkt von I. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x-\epsilon, x+\epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

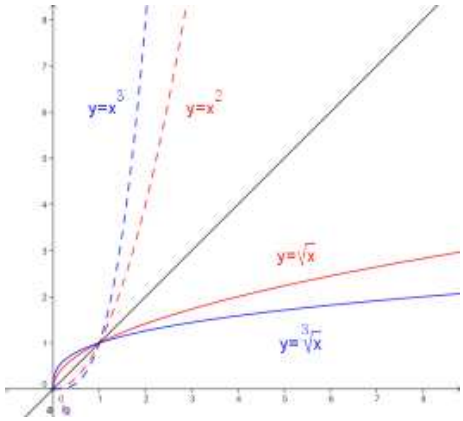
$$\delta := \min\left(y - f(x-\epsilon), f(x+\epsilon) - y\right) > 0$$

und für $y' \in [y-\delta, y+\delta]$ gilt wegen der Monotonie

$$g(y') \in [g(y-\delta), g(y+\delta)] \subseteq [x-\epsilon, x+\epsilon]\,.$$

Also ist g stetig in y. Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I, sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x - \epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x - \epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. □

13.3. **Stetigkeit der Wurzeln.**



Satz 13.6. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^n,$$

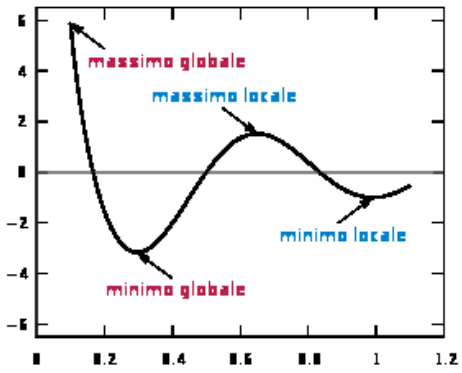
stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Die Stetigkeit ergibt sich aus Korollar 12.7. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Daraus ergibt sich die Injektivität. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die angegebenen Potenzfunktionen surjektiv und die Umkehrfunktionen existieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 13.5. □

13.4. **Minima und Maxima.**



Definition 13.7. Sei M eine Menge und

$$f\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}\,,$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}\,.$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch vom *globalen Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des *lokalen Maximums*.

Definition 13.8. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

Wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x' \neq x$, so spricht man von einem *isolierten Maximum*. Mit der Differentialrechnung werden wir bald schlagkräftige Methoden kennenlernen, um Minima und Maxima zu bestimmen.

Satz 13.9. *Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in [a,b]\,.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz wissen wir, dass das Bild $J := f([a,b])$ ein Intervall ist. Wir zeigen zunächst, dass J (nach oben und nach unten) beschränkt ist. Wir nehmen dazu an, dass J nicht nach oben beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $f(x_n) \geq n$. Nach Satz 7.7 besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $[a,b]$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert der Teilfolge zu $[a,b]$. Wegen der Stetigkeit muss dann auch die Bildfolge konvergieren. Die Bildfolge ist aber unbeschränkt, so dass sie nach Lemma 5.8 nicht konvergieren kann, und sich ein Widerspruch ergibt.

Sei nun y das Supremum von J. Es gibt eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J, die gegen das Supremum konvergiert. Nach Definition von J gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$. Für diese Folge gibt es wieder nach Satz 7.7 eine konvergente Teilfolge. Es sei x der Grenzwert dieser Teilfolge. Somit ist aufgrund der Stetigkeit $f(x) = y$ und daher $y \in J$. □

Korollar 13.10. *Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist das Bild $f([a,b])$ ebenfalls ein beschränktes abgeschlossenes Intervall.

Beweis. Dies folgt aus dem Zwischenwertsatz und Satz 13.9. □

Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall nennt man auch *kompakt*.

13. Arbeitsblatt

13.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 13.1. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 13.2. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon\ \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 13.3. Finde für die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 13.4.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0,1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 13.5. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht stetig ist, aber dem Zwischenwertsatz genügt.

Aufgabe 13.6. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 13.7. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 13.8. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 13.9. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 13.10. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 13.11. Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 13.12. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

stetige Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $(fg)(a) = 0$ und mit $f(a) \neq 0$. Zeige, dass es ein $\delta > 0$ gibt derart, dass die Einschränkung $g|_{[a-\delta,a+\delta]}$ die Nullfunktion ist.

13.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 13.13. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

(Achtung: Ableitungen haben wir noch nicht eingeführt!)

Aufgabe 13.14. (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 13.15. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 13.16. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3+13n^2+n}{8n^3-7n+10}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei M eine Menge und

$$f\colon\ M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 13.17. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow [a,b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a,b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

14. Vorlesung - Gleichmässig stetig

14.1. **Gleichmäßige Stetigkeit.**

Die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto 1/x,$$

ist stetig. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_+$ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x),\epsilon)$. Dabei hängt das δ nicht nur von der Zielgenauigkeit ϵ, sondern auch von x ab. Je kleiner x wird, desto steiler wird der Funktionsgraph und desto kleiner muss δ gewählt werden, damit das Bild der δ-Umgebung innerhalb der ϵ-Umgebung von $f(x)$ landet. Es gibt natürlich auch Funktionen, bei denen man zu jedem ϵ ein δ findet, dass für alle x die Stetigkeitseigenschaft sichert.

Definition 14.1. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon\ T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, x' \in T$ mit $d(x,x') \leq \delta$ ist $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$.

Lemma 14.2. *Eine stetige Funktion*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $\delta > 0$ ein Punktepaar $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| \leq \delta$ und $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$ gibt. Insbesondere gibt es somit für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Punktepaar $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge x_n eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge, deren Grenzwert, nennen wir ihn x, wegen der Abgeschlossenheit zum Intervall gehören muss. Die Glieder der Teilfolge besitzt die eingangs beschriebenen Eigenschaften, deshalb können wir direkt annehmen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren dann nach Lemma 12.4 auch die beiden Bildfolgen $f(x_n)$ und $f(y_n)$ gegen $f(x)$. Es sei nun $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist für n hinreichend groß sowohl $|f(x_n)-f(x)| \leq \epsilon'$ als auch $|f(y_n)-f(x)| \leq \epsilon'$. Dies ergibt mit der Dreiecksungleichung einen Widerspruch zu $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \epsilon$. □

14.2. **Fortsetzung von stetigen Funktionen.**

Definition 14.3. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Funktion und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$. Dann heißt eine Abbildung

$$\tilde{f}\colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine *stetige Fortsetzung* von f, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in T$ gilt.

Eine stetige Funktion besitzt im Allgemeinen keine stetige Fortsetzung auf einen größeren Definitionsbereich. Beispielsweise kann die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $x \mapsto x^{-1}$ nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt werden. Ferner muss eine stetige Fortsetzung (oder Ausdehnung), wenn sie denn existiert, nicht eindeutig sein. Für beide Fragestellungen ist die Existenz von Funktionslimiten in Berührpunkten der Definitionsmenge entscheidend.

Definition 14.4. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$. Ein Punkt $x \in \mathbb{K}$ heißt *Berührpunkt* von T, wenn es (mindestens) eine Folge $x_n \in T$ gibt, die gegen x konvergiert.

Satz 14.5. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Funktion und es sei $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$, wobei $\tilde{T}$ aus Berührpunkten von T bestehe. Für jedes $a \in \tilde{T} \setminus T$ existiere der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$. Dann

ist die durch

$$\tilde{f}(a) := \begin{cases} f(a)\,, \text{ falls } a \in T\,, \\ \lim_{x \to a} f(x), \text{ falls } a \in \tilde{T} \setminus T\,, \end{cases}$$

definierte Abbildung eine stetige Fortsetzung von f auf $\tilde{T}$.

Beweis. Sei $a \in \tilde{T}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da a ein Berührpunkt von T ist und da der Grenzwert von f in a existiert (bei $a \in T$ existiert er aufgrund der Stetigkeit), gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f(x), \tilde{f}(a)) \leq \epsilon/2$ für alle $x \in T$, $d(x,a) \leq \delta$. Sei nun $y \in \tilde{T}$ mit $d(y,a) \leq \delta/2$. Es gibt ein $x \in T$ mit $d(x,y) \leq \delta/2$ und mit $d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon/2$. Wegen der ersten Abschätzung und der Voraussetzung an y ist $d(x,a) \leq \delta$. Insgesamt ist daher

$$d(\tilde{f}(a), \tilde{f}(y)) \leq d(\tilde{f}(a), f(x)) + d(f(x), \tilde{f}(y)) \leq \epsilon.$$

□

Satz 14.6. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und $\overline{T}$ die Menge aller Berührpunkte von T. Es sei*

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 14.4 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ für jedes $a \in \overline{T} \setminus T$ existiert. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen a konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Da diese Bildfolge in $\mathbb{K}$ ist, und $\mathbb{K}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist für alle $x, x' \in T$ mit

$$d(x, x') \leq \delta.$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_0 mit $d(x_n, a) \leq \delta/2$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt daher $d(x_n, x_m) \leq \delta$ und somit insgesamt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen a konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ betrachtet, die ebenfalls gegen a konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt. □

Korollar 14.7. *Es sei*

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$f\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 14.6 und aus $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

14.3. **Reelle Exponentialfunktionen.**

Für jede positve reelle Zahl b und $n \in \mathbb{Z}$ ist b^n eine positive reelle Zahl. Für eine weitere natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_+$ und eine positive reelle Zahl y ist $y^{1/m}$ definiert. Für eine rationale Zahl $q = n/m$ ist daher $b^q = (b^n)^{1/m}$ definiert, und zwar ist dies unabhängig von der Wahl der Zähler und Nenner in der Darstellung von q.

Lemma 14.8. *Es sei b eine positive reelle ZahlDann besitzt die Funktion*

$$f\colon\, \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\, q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(2) *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.12. □

Lemma 14.9. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann ist die Funktion*

$$f\colon\, \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\, q \longmapsto b^q,$$

auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir betrachten Intervalle der Form $[-n, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Monotonie ist

$$b^q \,\leq\, m \,:=\, \max\left(b^n, b^{-n}\right)$$

für alle $q \in [-n, n]$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $\left(b^{1/k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, daher gibt es insbesondere ein k derart, dass

$$\left|b^{1/k} - 1\right| \,\leq\, \frac{\epsilon}{m}$$

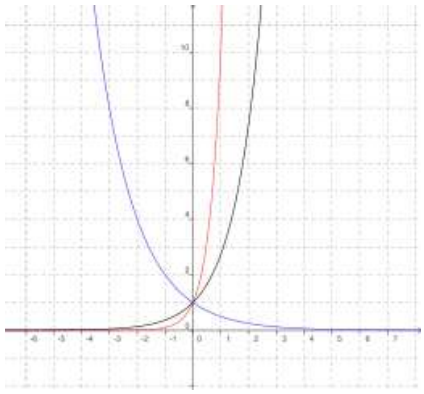
ist. Wir setzen $\delta = 1/k$. Dann gelten für zwei beliebige rationale Zahlen $q, q' \in [-n, n]$ mit

$$|q' - q| \,\leq\, \delta$$

unter Verwendung der Funktionalgleichung die Abschätzungen (wir beschränken uns auf den Fall $b \geq 1$ und $q' \geq q$)

$$\left|b^{q'} - b^q\right| \,=\, \left|b^{q'}/b^q - 1\right| b^q \,\leq\, \left|b^{q'-q} - 1\right| m \,\leq\, \frac{\epsilon}{m} \cdot m \,=\, \epsilon.$$

□



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10, \frac{1}{2}$ und e.

Aufgrund von Lemma 14.9 und Korollar 14.7 (mit einem beliebigen Intervall $[-n, n]$ statt ganz $\mathbb{Q}$.) lassen sich die zunächst nur auf $\mathbb{Q}$ definierten Exponentialfunktionen zu stetigen Funktionen auf den reellen Zahlen fortsetzen. In diesem Sinn ist die folgende Definition zu verstehen.

Definition 14.10. Sei b eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* b.

Lemma 14.11. *Es sei b eine positive reelle ZahlDann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(3) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(4) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(5) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.15. □

Eine besondere Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis $b = e$. Wir werden dafür bald eine weitere Beschreibung kennenlernen, die auch für komplexe Exponenten erklärt ist.

14. Arbeitsblatt

14.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 14.1. Zeige, dass durch

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

eine stetige, streng wachsende, bijektive Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$

gegeben wird, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 14.2. Zeige, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 14.3. Zeige, dass das Bild eines offenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht offen sein muss.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass das Bild eines beschränkten Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht beschränkt sein muss.

Aufgabe 14.5. Es sei I ein reelles Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, injektive Funktion. Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 14.6. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Polynomfunktion vom Grad ≥ 2. Zeige, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x < \sqrt{2}\,, \\ 1\,, \text{ falls } x > \sqrt{2}\,, \end{cases}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.8. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f gibt.

Aufgabe 14.9. Man gebe ein Beispiel einer gleichmäßig stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

derart, dass keine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

existiert.

Aufgabe 14.10. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist und f nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 14.11. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 14.12. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\ q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(2) Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q \cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.

Aufgabe 14.13. Sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die durch

$$\sqrt[k]{b} = b^{1/k}$$

definierte Folge gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 14.14. Führe die Details im Beweis zu Lemma 14.9 für den Fall $b < 1$ aus.

Aufgabe 14.15. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(3) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(4) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(5) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und es sei eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

und Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Unter der zugehörigen (stückweise) *linearen Interpolation* versteht man die Abbildung

$$g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x),$$

die auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ durch die affin-lineare Funktion gegeben ist, deren Graph die Punkte (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) durch eine gerade Strecke verbindet.

Diese Konstruktion kommt insbesondere dann zum Zuge, wenn eine gegebene Funktion

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

approximiert werden soll, wobei die Unterteilung gegeben ist und man $y_i = f(x_i)$ nimmt.

Aufgabe 14.16. Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und es sei eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

und Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k \in \mathbb{R}$ gegeben. Beschreibe die zugehörige lineare Interpolation durch funktionale Ausdrücke und zeige, dass es sich um eine stetige Funktion handelt.

Aufgabe 14.17. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.

In den folgenden Aufgaben bedeutet $C^0(T, \mathbb{K})$ die Menge der stetigen Funktionen von T nach $\mathbb{K}$ (für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$) und $B(P, b)$ den abgeschlossenen Vollkreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt P und Radius b (die Randpunkte gehören also dazu).

14.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 14.18. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon\ C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{Q}, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_{\mathbb{Q}},$$

eine stetige Funktion wird also auf ihre Einschränkung auf $\mathbb{Q}$ abgebildet. Zeige, dass Ψ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 14.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige unbeschränkte Funktion

$$f\colon\ [0, 2[\longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass eine solche Funktion keine stetige Fortsetzung auf $[0, 2]$ besitzt.

Aufgabe 14.20. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}_+$ und

$$f\colon\ B(P, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

von f gibt.

Aufgabe 14.21. (6 Punkte)

Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

derart, dass die lineare Interpolation g (zu dieser Unterteilung und zu f) die Eigenschaft

$$|f(x) - g(x)| \leq \epsilon \text{ für alle } x \in [a, b]$$

erfüllt.

(Bemerkung: Die vorstehende Aufgabe kann man so interpretieren, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn man mit einem beliebig dünnen (gemessen in vertikaler Richtung) Stift den Funktionsgraphen durch zusammenhängende (endlich viele, nicht vertikale) Geradenstücke übermalen kann.)

15. Vorlesung - Potenzreihen

15.1. **Cauchy-Produkt von Reihen.**

Definition 15.1. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Lemma 15.2. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und für die Summe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i,\ y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}
|z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} c_k - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) \right| \\
&= \left| \sum_{0\le i,j\le n,\, i+j>n} a_i b_j \right| \\
&\le \sum_{0\le i,j\le n,\, i+j>n} |a_i|\,|b_j| \\
&\le \left(\sum_{n/2<i\le n} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right) \\
&\quad + \left(\sum_{n/2<j\le n} |b_j|\right)\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{n/2<i\leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left(\sum_{n/2<j\leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right).$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2<i\leq n} |a_i|$ und $\sum_{n/2<j\leq n} |b_j|$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 15.15), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen mit dem Majorantenkriterium aus der Abschätzung $|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i|\,|b_{k-i}|$. □

15.2. **Potenzreihen.**

Definition 15.3. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Zahl $z \in \mathbb{C}$, , ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Genauer spricht man von einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Eine Potenzreihe mit *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der neunten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $|z| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

15.3. **Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion.**

Definition 15.4. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \cdots .$$

Satz 15.5. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

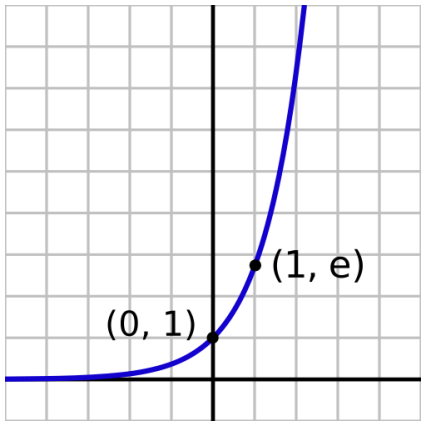
absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2\,|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 15.6. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp\, z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (komplexe) *Exponentialfunktion.*

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis

$$\exp\, 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

ist, und dass exp 1 mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt (Korollar 16.11 und Korollar 20.14).

Die folgende Aussage nennt man die *Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion.*

Satz 15.7. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w\,.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z+w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 15.8. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für reelles z ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für reelle Zahlen $z > 0$ ist* $\exp z > 1$ *und für $z < 0$ ist* $\exp z < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion* [13] *ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp 0 = 1$$

aufgrund von Satz 15.7. (3) folgt aus Satz 15.7 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in

[13] Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

$\mathbb{C}$ abgeschlossen[14] sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z = \exp\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right) = \exp\frac{z}{2}\cdot\exp\frac{z}{2} = \left(\exp\frac{z}{2}\right)^2 \geq 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n > \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n = \exp(-x),$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $x > y$ ist $x - y > 0$ und daher nach (5) $\exp(x-y) > 1$, also

$$\exp x = \exp(x-y+y) = \exp(x-y)\exp y > \exp y.$$

□

15.4. **Die trigonometrischen Reihen.**

Definition 15.9. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin z := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Kosinus* und *Sinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

Satz 15.10. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z,$$

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

[14] Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn jede Folge in T, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, schon in T konvergiert. Eine reelle Folge, die aufgefasst als komplexe Folge konvergiert, konvergiert offenbar in $\mathbb{R}$.

(1) *Für* $z = x + iy$ *ist*

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y)\,.$$

(2) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.

(3) *Es ist* $\cos(-z) = \cos z$ *und* $\sin(-z) = -\sin z$.

(4) *Es ist*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,.$$

(5) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(z+w) = \cos z \ \cos w - \sin z \ \sin w\,.$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \ \cos w + \cos z \ \sin w\,.$$

(6) *Es gilt*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1\,.$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 15.7 gilt

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot \exp(iy)\,,$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Da man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren[15] darf, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos y + i \sin y\,.
\end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \frac{\exp(i(z+w)) + \exp(-i(z+w))}{2} \\
&= \frac{\exp(iz)\exp(iw) + \exp(-iz)\exp(-iw)}{2} \\
&= \frac{1}{2}((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\
&\quad +(\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w))
\end{aligned}$$

[15]Dies werden wir in Vorlesung 17 ausführlich begründen. Hier fassen wir nur jeweils zwei aufeinander folgende Reihenglieder zusammen, was aufgrund von Aufgabe 15.8 möglich ist.

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{2}(\cos z \cos w \\ & +i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) - \sin z \sin w \\ & + \cos z \cos w \\ & -i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) \\ & - \sin z \sin w) \\ = & \cos z \cos w - \sin z \sin w . \end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \cos (z - z) \\ &= \cos z \cos (-z) - \sin z \sin (-z) \\ &= \cos z \cos z + \sin z \sin z . \end{aligned}$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z, \sin z)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z, \sin z)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel (im Bogenmaß) interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.

15. Arbeitsblatt

15.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 15.1. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 15.2. Es seien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

zwei absolut konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 15.3. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von z) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} .$$

Aufgabe 15.4. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen z^0, z^1, z^2, z^3, z^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \;=\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^3 .$$

Aufgabe 15.5.*

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Aufgabe 15.6. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp\, x,$$

nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.[16]

Aufgabe 15.7.*

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Es sei $I \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{falls } n \in I, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

ebenfalls absolut konvergent mit einem Konvergenzradius $\geq r$ ist.

[16] Aus der Stetigkeit, die wir aber noch nicht bewiesen haben, folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 15.8. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \in \mathbb{C}$. Zeige, dass die durch die Reihenglieder

$$a_n := c_{2n} + c_{2n+1}$$

definierte Reihe ebenfalls und zwar gegen die gleiche Summe konvergiert.

Aufgabe 15.9. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

Aufgabe 15.10. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

15.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 15.11. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^4 .$$

Aufgabe 15.12. (4 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ sei

$$R_{N+1}(z) = \exp z - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(z)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |z|^{N+1}$$

gilt.

Aufgabe 15.13. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1\,.$$

Aufgabe 15.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[17]

Aufgabe 15.15. (3 Punkte)

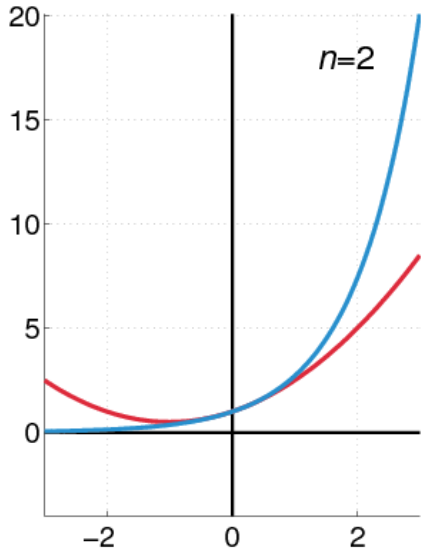
Beweise das Additionstheorem für den Sinus, also die Gleichheit

$$\sin(z+w) \;=\; \sin z \;\; \cos w \;+\; \cos z \;\; \sin w$$

für $z, w \in \mathbb{C}$.

16. Vorlesung - Funktionenfolgen

16.1. **Funktionenfolgen.**



Eine (vertikal gestauchte) Darstellung der ersten acht polynomialen Approximationen der reellen Exponentialfunktion

[17] Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

Wir haben das letzte Mal gesehen, dass die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stellt also die Polynomfunktion

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

eine „approximierende Funktion“ für die Exponentialfunktion dar. Dabei ist allerdings die Güte der Approximation abhängig von z (bei fixiertem n). In dieser Vorlesung werden wir verschiedene Konzepte vorstellen, wie man eine Funktion als Grenzfunktion einer Funktionenfolge auffassen kann. Eine unmittelbare Anwendung wird sein, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

Definition 16.1. Es sei T eine Menge und

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

(in $\mathbb{K}$) konvergiert.

Wenn eine punktweise konvergente Funktionenfolge vorliegt, so wird durch

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

eine sogenannte *Grenzfunktion* $f \colon T \to \mathbb{K}$ definiert.

Die Funktionenfolge $f_n = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{k!} z^k$ konvergiert punktweise, die Grenzfunktion ist die Exponentialfunktion. Selbst wenn (bei $T \subseteq \mathbb{K}$) sämtliche Funktionen stetig sind, muss diese Grenzfunktion nicht stetig sein.

Beispiel 16.2. Es sei $T = [0,1]$ und

$$f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n.$$

Für jedes $x \in [0,1]$, $x < 1$, konvergiert die Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 und für $x = 1$ liegt die konstante Folge zum Wert 1 vor. Die Grenzfunktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1\,, \\ 1 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig, obwohl alle f_n stetig sind.

Man braucht einen stärkeren Konvergenzbegriff, um die Stetigkeit der Grenzfunktion zu sichern.

Definition 16.3. Es sei T eine Menge und

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Funktion

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T$$

gibt.

Lemma 16.4. *Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge und es sei*

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in T$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in T$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in T$ mit $d(x, y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{array}{rcl} d(f(x), f(y)) & \leq & d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ & \leq & \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ & = & \epsilon. \end{array}$$

□

16.2. **Das Konvergenzkriterium von Weierstraß.**

Definition 16.5. Es sei T eine Menge und

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$|| f || := || f ||_T = \sup (|f(x)| \, | x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Die folgende Aussage heißt das *Konvergenzkriterium von Weierstraß*. Es geht darin um Funktionenfolgen f_n, die als Partialsummen $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ von Funktionen g_k gegeben sind, wie dies auch bei Potenzreihen der Fall ist.

Satz 16.6. *Es sei T eine Menge und sei*

$$g_k \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktionenfolge mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} || g_k || < \infty \, .$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ (also die Funktionenfolge $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$) gleichmäßig und punktweise absolut gegen eine Funktion

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Sei $x \in T$. Wegen $|g_k(x)| \leq || g_k ||$ ist aufgrund des Majorantenkriteriums die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)|$ absolut konvergent, und das bedeutet, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ punktweise absolut konvergiert. Wir setzen $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$ und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

Wir wollen zeigen, dass die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund des Cauchy-Kriteriums für Reihen gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} || g_k || \leq \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Damit haben wir für $n \geq n_0$ insgesamt die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |g_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} || g_k || \leq \epsilon.$$

□

16.3. **Konvergenz von Potenzreihen.**

Es seien c_n, $n \in \mathbb{N}$, komplexe Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Funktionenfolge f_n mit

$$f_n \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k.$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist dies eine Potenzreihe in $z - a$. Im Folgenden werden wir auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ mit variablem z als Potenzreihe bezeichnen. Dabei heißt a der *Entwicklungspunkt der Potenzreihe*. Im Allgemeinen konvergiert diese Funktionenreihe weder punktweise auf ganz $\mathbb{C}$ noch gleichmäßig. Wir werden aber sehen, dass häufig auf geeigneten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Lemma 16.7. *Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

sei für eine komplexe Zahl $z = b$, $b \neq a$, konvergent. Dann ist für jeden reellen Radius r mit $0 < r < |b-a|$ die Potenzreihe $f(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a,r)$ punktweise absolut und gleichmäßig konvergent.

Beweis. Wir werden Satz 16.6 auf $T = B(a,r)$ anwenden. Wegen der Konvergenz für $z = b$ sind die Summanden $c_n(b-a)^n$ nach Lemma 9.5 eine Nullfolge, d.h. es gibt insbesondere ein $M > 0$ mit

$$|c_n (b-a)^n| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gelten für jedes $z \in B(a,r)$ die Abschätzungen

$$|c_n(z-a)^n| \;=\; |c_n(b-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{b-a}\right|^n \;\leq\; M \cdot \left|\frac{z-a}{b-a}\right|^n \;\leq\; M\left(\frac{r}{|b-a|}\right)^n.$$

Dabei ist nach Voraussetzung $\frac{r}{|b-a|} < 1$. Daher liegen rechts die Summanden einer nach Satz 9.13 konvergenten geometrische Reihe vor. Deren Grenzwert liefert eine obere Schranke für die Reihe der Supremumsnormen. □

Definition 16.8. Für eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

heißt

$$\sup\left(|b-a|, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(b-a)^n \text{ konvergiert}\right)$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Das ist eine nichtnegative reelle Zahl oder $= \infty$.

Jede Potenzreihe hat also grundsätzlich das gleiche Konvergenzverhalten: Es gibt eine Kreischeibe (die eben durch den Konvergenzradius bestimmt ist, wobei die Extremfälle $r = 0$ und $r = \infty$ erlaubt sind) um den Entwicklungspunkt, in deren Innerem die Potenzreihe konvergiert und so, dass sie außerhalb davon in keinem Punkt konvergiert. Nur auf dem Rand der Kreisscheibe kann alles mögliche passieren. Der Fall $r = 0$ ist nicht sehr interessant. Bei positivem Konvergenzradius (einschließlich dem Fall $r = \infty$) sagt man auch, dass die Potenzreihe konvergiert.

Korollar 16.9. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius r. Dann stellt die Potenzreihe $f(z)$ auf der offenen Kreisscheibe $U(a,r)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Jeder Punkt $z \in U(a,r)$ liegt im Innern einer abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a,s) \subseteq U(a,r)$ mit $s < r$. Auf dieser abgeschlossenen Kreisscheibe ist die Potenzreihe nach Lemma 16.7 gleichmäßig konvergent, daher ist nach Lemma 16.4 die Grenzfunktion stetig. □

Korollar 16.10. *Die Exponentialreihe und die trigonometrischen Reihen Sinus und Kosinus besitzen einen unendlichen Konvergenzradius, und die komplexe Exponentialfunktion, die komplexe Sinusfunktion und die komplexe Kosinusfunktion sind stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.5 und Korollar 16.9. □

Korollar 16.11. *Für die (durch die Exponentialreihe definierte) reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp\, x,$$

gilt

$$\exp\, x = (\exp\, 1)^x\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.7, aus Korollar 16.10 und aus Aufgabe 14.17. □

Die reelle Zahl $\exp\, 1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ stimmt mit der als $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ eingeführten *eulerschen Zahl* überein, was wir aber noch nicht bewiesen haben. Aufgrund dieses Sachverhaltes und der vorstehenden Aussage schreiben wir häufig $e^z = \exp\, z$, und zwar auch für komplexe Argumente.

16.4. **Der Identitätssatz für Potenzreihen.**

Lemma 16.12. *Es seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, deren Minimum r sei. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist konvergent auf $U\,(0,r)$ und stellt dort die Summenfunktion $f + g$ dar.*
(2) *Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ mit $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ ist konvergent auf $U\,(0,r)$ und stellt dort die Produktfunktion fg dar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.10. □

Satz 16.13. *Es seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien und derart, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, dass die dadurch definierten Funktionen*

$$f, g\colon\, U\,(0,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{K}$$

übereinstimmen. Dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir betrachten die Differenzreihe $h = f - g = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = a_n - b_n$. Deren zugehörige Funktion ist nach Voraussetzung und nach Lemma 16.12 (1) auf $U\,(0,\epsilon)$ die Nullfunktion. Nach Aufgabe 16.14 ist daher $c_n = 0$, also $a_n = b_n$. □

16. Arbeitsblatt

16.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 16.1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten auf einem reellen Intervall $[a,b]$ die Funktionenfolge

$$f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert, und bestimme die Grenzfunktion.

Aufgabe 16.2. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto tx_n.$$

Zeige, dass diese Funktionenfolge punktweise, aber im Allgemeinen nicht gleichmäßig konvergiert. Was ist die Grenzfunktion?

Aufgabe 16.3.*

Sei T eine Menge und seien

$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K},\, t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 16.4. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Funktionen

$$f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f_n(x),$$

die durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ für } x \leq 0, \\ nx \text{ für } 0 < x \leq 1/n, \\ 2 - nx \text{ für } 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, \text{ für } x > 2/n\,. \end{cases}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionen stetig sind, und dass diese Funktionenfolge punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

Aufgabe 16.5.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Aufgabe 16.6. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} |\ ||f||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass M ein komplexer Vektorraum ist.

Aufgabe 16.7. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die zugehörige Potenzreihe. Zeige, dass deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius der um $a \in \mathbb{C}$ „verschobenen“ Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

übereinstimmt.

Aufgabe 16.8.*

Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

Aufgabe 16.9. Zeige, dass die Exponentialreihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 16.10. Es seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien, deren Minimum r sei. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = a_n + b_n$ ist konvergent auf $U(0,r)$ und stellt dort die Summenfunktion $f+g$ dar.
(2) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ mit $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ ist konvergent auf $U(0,r)$ und stellt dort die Produktfunktion fg dar.

16.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 16.11. (4 Punkte)

Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n}.$$

Zeige, dass diese Folge für $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ punktweise konvergiert, und untersuche die Folge auf gleichmäßige Konvergenz für die verschiedenen Definitionsmengen

$$I = \mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{R}_+,\ [1,\infty],\ [\frac{1}{5},5],\ ]0,1],\ [0,1]\,.$$

Aufgabe 16.12. (4 Punkte)

Betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Zeige, dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt, und dass die Reihe noch für alle $x \in \mathbb{C}$, $|x| = 1$, konvergiert.

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \to \mathbb{C} |\ ||\, f\,||_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T. Zeige, dass die Supremumsnorm auf M folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $||\, f\,|| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $||\, f\,|| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt
$$||\, \lambda f\,|| = |\lambda| \cdot ||\, f\,||\ .$$
(4) Für $g, f \in M$ gilt
$$||\, g + f\,|| \leq ||\, g\,|| + ||\, f\,||\ .$$

Aufgabe 16.14. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe, die für ein $\epsilon > 0$ auf $U\,(0,\epsilon)$ konvergiere und dort die Nullfunktion darstelle. Zeige, dass dann $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (d.h. die Potenzreihe ist die Nullreihe).

Aufgabe 16.15. (5 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ und sei für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ eine konvergente Folge

$$(c_{in})_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ gegeben, deren Limes mit c_i bezeichnet sei. Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen vom Grad $\leq d$, die durch

$$f_n := c_{dn}x^d + c_{d-1\,n}x^{d-1} + \cdots + c_{2n}x^2 + c_{1n}x + c_{0n}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionenfolge auf jeder kompakten Kreisscheibe $B(0,r)$ gleichmäßig gegen

$$f = c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

konvergiert.

17. Vorlesung - Entwicklungssatz

17.1. **Logarithmen.**

Satz 17.1. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_+$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Korollar 16.10. Nach Korollar 15.8 (4) liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Korollar 15.8 (3), woraus wegen Korollar 15.8 (2), folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 15.8 (6). □

Definition 17.2. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

Satz 17.3. *Der natürliche Logarithmus*

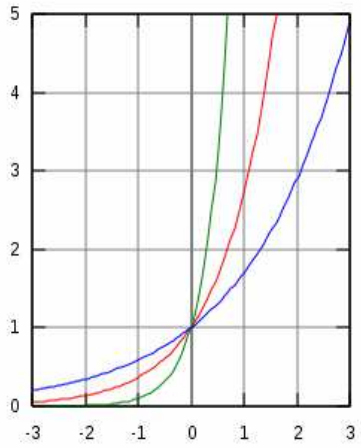
$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ stiftet. Dabei gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 17.1, Satz 13.5, Satz 15.7 und Korollar 15.8. □



Die Exponentialfunktionen für verschiedene Basen

Definition 17.4. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis* b von $z \in \mathbb{C}$ als

$$b^z := \exp(z \ln b).$$

Aufgabe 17.1 zeigt, dass für reelle Argumente diese Definition mit der aus der 14ten Vorlesung übereinstimmt.

Satz 17.5. *Für die Exponentialfunktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z,$$

zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$ *gelten die folgenden Rechenregeln (dabei seien* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *und* $z, w \in \mathbb{C}$*, bei (4) sei zusätzlich* $z \in \mathbb{R}$*).*

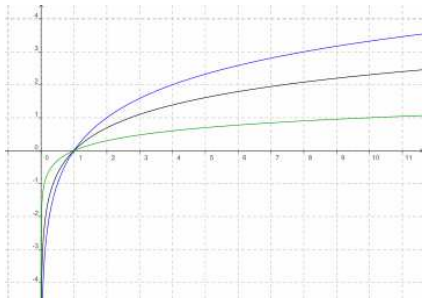
(1) $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$.
(2) $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.
(3) $(ab)^z = a^z b^z$.
(4) $(a^z)^w = a^{zw}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.2. □

Definition 17.6. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ wird der *Logarithmus zur Basis* b von $x \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Satz 17.7. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist* $\log_b(b^x) = x$ *und* $b^{\log_b(y)} = y$*, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.*
(2) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(4) *Es gilt*

$$\log_a y \;=\; \log_a(b^{\log_b y}) \;=\; \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 17.3. □

17.2. **Summierbarkeit.**

Bei einer Reihe sind die aufzusummierenden Glieder durch die natürlichen Zahlen geordnet. Häufig kommt es vor, dass diese Ordnung verändert wird. Dafür ist es sinnvoll, einen Summationsbegriff zu besitzen, der unabhängig von jeder Ordnung der Indexmenge ist. Wir werden diese Theorie nicht systematisch entwickeln, sondern nur den großen Umordnungssatz beweisen, den wir sogleich für das Entwickeln einer Potenzreihen in einem neuen Entwicklungspunkt benötigen. Die Familie sei als a_i , $i \in I$, gegeben. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ kann man die zugehörigen Glieder aufsummieren, und wir setzen

$$a_E \;=\; \sum_{i \in E} a_i.$$

Eine sinnvolle Aufsummierung der gesamten Familie muss auf diese endlichen Teilsummen a_E Bezug nehmen.

Definition 17.8. Sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt *summierbar*, wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Beziehung

$$|a_E - s| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_E = \sum_{i \in E} a_i$. Im summierbaren Fall heißt s die *Summe* der Familie.

Definition 17.9. Sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Diese Familie heißt eine *Cauchy-Familie*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart gibt, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_0 \cap D = \emptyset$ die Beziehung

$$|a_D| \leq \epsilon$$

gilt. Dabei ist $a_D = \sum_{i \in D} a_i$.

Lemma 17.10. *Sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Dann ist die Familie genau dann summierbar, wenn sie eine Cauchy-Familie ist.*

Beweis. Sei zunächst die Familie summierbar mit der Summe s, und sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\epsilon/2$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Mengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Abschätzung $|a_E - s| \leq \epsilon/2$ gilt. Für jede zu E_0 disjunkte endliche Teilmenge D gilt dann

$$\begin{aligned} |a_D| &= |a_D + a_{E_0} - s - a_{E_0} + s| \\ &\leq |a_D + a_{E_0} - s| + |a_{E_0} - s| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

so dass die Cauchy-Bedingung erfüllt ist. Sei nun a_i , $i \in I$, eine Cauchy-Familie. Wir brauchen zunächst einen Kandidaten für die Summe. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ derart, dass für jede endliche Teilmenge $D \subseteq I$ mit $E_n \cap D = \emptyset$ die Abschätzung $|a_D| \leq 1/n$ gilt. Wir können annehmen, dass $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n gilt. Wir setzen

$$x_n := a_{E_n} = \sum_{i \in E_n} a_i.$$

Für $k \geq m \geq n$ gilt

$$|x_k - x_m| = \left| \sum_{i \in E_k} a_i - \sum_{i \in E_m} a_i \right| = \left| a_{E_k \setminus E_m} \right| \leq 1/m \leq 1/n,$$

da die Menge $E_k \setminus E_m$ disjunkt zu E_m ist. Daher ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergent gegen ein $s \in \mathbb{C}$. Wir behaupten, dass die Familie summierbar ist mit der Summe s. Sei dazu ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt $n \in \mathbb{N}_+$ mit $1/n \leq \epsilon/2$. Dann ist wegen der Folgenkonvergenz $|x_n - s| \leq \epsilon/2$. Für jedes endliche $E \supseteq E_n$ schreiben wir $E = E_n \cup D$ mit $E_n \cap D = \emptyset$. Damit gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |a_E - s| &= |a_{E_n} + a_D - s| \\ &\leq |a_{E_n} - s| + |a_D| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 17.11. *Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Dann ist auch a_i , $i \in J$, summierbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.6. □

17.3. **Der große Umordnungssatz.**

Satz 17.12. *Es sei a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie von komplexen Zahlen mit der Summe s. Es sei J eine weitere Indexmenge und zu jedem $j \in J$ sei eine Teilmenge $I_j \subseteq I$ gegeben mit $\bigcup_{j\in J} I_j = I$ und $I_j \cap I_{j'} = \emptyset$ für $j \neq j'$.*[18] *Dann sind die Teilfamilien a_i, $i \in I_j$, summierbar und für ihre Summen $s_j = \sum_{i\in I_j} a_i$ gilt, dass die Familie s_j, $j \in J$, summierbar ist mit*

$$s = \sum_{j\in J} s_j \, .$$

Beweis. Die Summierbarkeit der Teilfamilien folgt aus Korollar 17.11. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Ausgangsfamilie summierbar ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ mit

$$|a_E - s| \leq \epsilon/2$$

für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$. Es gibt eine endliche Teilmenge $F_0 \subseteq J$ derart, dass

$$E_0 \subseteq \bigcup_{j\in F_0} I_j$$

ist. Wir behaupten, dass dieses F_0 für die Familie s_j , $j \in J$, die Summationseigenschaft für ϵ erfüllt. Sei dazu $F \subseteq J$ mit $F_0 \subseteq F$ endlich und $n = \#(F)$. Da die Familien a_i , $i \in I_j$, summierbar sind mit den Summen s_j, gibt es für jedes $j \in F$ ein endliches $G_{j,0} \subseteq I_j$ mit

$$\left|a_{G_j} - s_j\right| \leq \epsilon/2n$$

für alle endlichen $G_j \subseteq I_j$ mit $G_{j,0} \subseteq G_j$. Wir wählen nun für jedes $j \in F$ ein solches G_j so, dass zusätzlich $E_0 \cap I_j \subseteq G_j$ gilt. Dann ist $E_0 \subseteq E := \bigcup_{j\in F} G_j$ und daher $\left|\sum_{j\in F} a_{G_j} - s\right| = \left|\sum_{i\in E} a_i - s\right| \leq \epsilon/2$. Somit haben wir insgesamt die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j\in F} s_j - s\right| &= \left|\sum_{j\in F}(s_j - a_{G_j}) + \sum_{j\in F} a_{G_j} - s\right| \\
&\leq \sum_{j\in F}\left|s_j - a_{G_j}\right| + \left|\sum_{j\in F} a_{G_j} - s\right| \\
&\leq n \cdot \epsilon/2n + \left|\sum_{i\in E} a_i - s\right|
\end{aligned}$$

[18] D.h. die I_j bilden eine disjunkte Vereinigung von I.

$$\begin{aligned} &\leq n \cdot \epsilon/2n + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

17.4. **Der Entwicklungssatz für Potenzreihen.**

Satz 17.13. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und sei $b \in U(a,R)$. Dann gibt es eine konvergente Potenzreihe

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i$$

mit Entwicklungspunkt b und mit einem Konvergenzradius $s \geq R - |a-b| > 0$ derart, dass die durch diese beiden Potenzreihen dargestellten Funktionen auf $U(b,s)$ übereinstimmen. Die Koeffizienten von h sind

$$d_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n (b-a)^{n-i}$$

und insbesondere ist

$$d_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (b-a)^{n-1}.$$

Beweis. Zur Notationsvereinfachung sei $a = 0$, $b \in U(0,R)$ und $z \in U(b, R-|b|)$. Wir betrachten die Familie

$$x_{ni} = c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i},\ n \in \mathbb{N},\ i \in \{0,\dots,n\}.$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Familie summierbar ist. Dies folgt aus der Abschätzung (unter Verwendung von Aufgabe 17.14)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,\dots,N,\, i=0,\dots,n} \left| c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \right| &\leq \sum_{n=0}^{N} |c_n| \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |z-b|^i |b|^{n-i} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} |c_n| \left(|z-b| + |b| \right)^n \end{aligned}$$

und daraus, dass wegen $|z-b| + |b| < R$ gemäß Lemma 16.7 die rechte Seite für beliebiges N beschränkt ist. Wegen der Summierbarkeit gelten aufgrund des großen Umordnungssatzes die Gleichungen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n((z-b)+b)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N},\, i=0,\ldots,n} c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n b^{n-i} \right) (z-b)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i.
\end{aligned}
$$

□

17. Arbeitsblatt

17.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 17.1. Sei $b > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeige für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$b^x = \exp(x \cdot \ln b) .$$

Aufgabe 17.2. Zeige, dass für die Exponentialfunktionen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z,$$

zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$ die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $z, w \in \mathbb{C}$, bei (4) sei zusätzlich $z \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$.
(2) $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.
(3) $(ab)^z = a^z b^z$.
(4) $(a^z)^w = a^{zw}$.

Aufgabe 17.3. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt

$$\log_a y \ = \ \log_a \left(b^{\log_b y} \right) \ = \ \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 17.4. Seien $b, d > 0$. Zeige

$$\lim_{b \to 0} b^d = 0 \, .$$

Aufgabe 17.5. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit dem positiven Grenzwert a. Zeige, dass die durch $w_n = a_n^{z_n}$ definierte Folge gegen a^z konvergiert.

Aufgabe 17.6. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit dem Grenzwert 0. Zeige durch Beispiele, dass die durch $w_n = a_n^{z_n}$ definierte Folge nicht konvergieren muss.

Aufgabe 17.7. Es sei a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Zeige, dass auch die Teilfamilie a_i, $i \in J$, summierbar ist.

Aufgabe 17.8. Sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Die Betragsfamilie $|a_i|$, $i \in I$, sei summierbar. Zeige, dass a_i, $i \in I$, summierbar ist.

Aufgabe 17.9. Sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Familie

$$|a_E| = \left| \sum_{i \in E} a_i \right| , E \subseteq I, \, E \text{ endlich} \, ,$$

nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 17.10. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zeige, dass die Familie

$$z^k z^\ell, \, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \, ,$$

summierbar ist.

Aufgabe 17.11. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Berechne zur summierbaren Familie

$$z^k z^\ell, \, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \, ,$$

die Teilsummen

$$s_k = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} z^k z^\ell$$

zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und berechne $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_k$.

Aufgabe 17.12. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zu $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$I_j = \left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 | \, k - \ell = j\right\} .$$

Berechne zu jedem $j \in \mathbb{Z}$ zur summierbaren Familie

$$z^k z^\ell, \, (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 ,$$

die Teilsummen

$$t_j = \sum_{(k,\ell)\in I_j} z^k z^\ell$$

und berechne $\sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j$.

Aufgabe 17.13.*

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2}, \, q \in \mathbb{Q} \cap [2,3] ,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 17.14. Schreibe das Polynom

$$Z^3 - (2+i)Z^2 + 3iZ + 4 - 5i$$

in der neuen Variablen $W = Z + 2 - i$.

Aufgabe 17.15. Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_3$ der geometrischen Reihe im Entwicklungspunkt $\frac{1}{2}$.

(Für d_1 ist es hilfreich, eine Formel für $\sum_{n=k}^{\infty} z^n$ aufzustellen. Für d_2, d_3 wird die Aufsummierung ziemlich kompliziert. Mit dem Ableitungskalkül haben wir bald eine einfache Möglichkeit, diese Koeffizienten auszurechnen. Dieser beruht für Potenzreihen allerdings auf dem Entwicklungssatz.)

17.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 17.16. (4 Punkte)

Sei a_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 17.17. (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus allen Zahlen besteht, in deren Dezimalentwicklung keine 9 vorkommt. Zeige, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$

summierbar ist.

Aufgabe 17.18. (5 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{a^2+b^2},\ a,b \in \mathbb{N}_+ ,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 17.19. (5 Punkte)

Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie von nichtnegativen reellen Zahlen. Zeige, dass die Teilmenge

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$$

abzählbar ist.

Aufgabe 17.20. (3 Punkte)

Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_6$ der Exponentialreihe im Entwicklungspunkt 1.

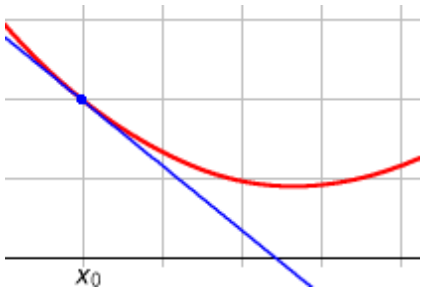
18. Vorlesung - Differenzierbarkeit

18.1. **Differenzierbare Funktionen.**

In dieser Vorlesung betrachten wir Funktionen

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge in $\mathbb{K}$ ist. Das ist eine Menge derart, dass es zu jedem $a \in D$ auch eine offene Umgebung $U(a,r)$, $r > 0$, gibt, die ganz in D liegt. Typische Beispiele sind $D = \mathbb{K}$, $U(a,r)$, $\mathbb{K} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.



Definition 18.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente*.

Definition 18.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{K}$. Häufig nimmt man die Differenz $h = x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 18.3. Es seien $s, c \in \mathbb{K}$ und sei

$$\alpha\colon\ \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto sz + c,$$

eine sogenannte affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ betrachtet man

$$\frac{(sx+c)-(sa+c)}{x-a} = \frac{s(x-a)}{x-a} = s\,.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 18.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto z^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a+h$ ist

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} & = & \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ & = & \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} \\ & = & \dfrac{2ah+h^2}{h} \\ & = & 2a+h. \end{array}$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung ist daher $f'(a) = 2a$.

18.2. **Lineare Approximierbarkeit.**

Satz 18.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)\,.$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} r(x) \;=\; \lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x)\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Abbildung

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Ihr Graph heißt die *Tangente* an f im Punkt a. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

Korollar 18.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon\, D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 18.5. □

18.3. **Ableitungsregeln.**

Lemma 18.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g\colon\, D \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f+g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$

(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

(3) *Für $c \in \mathbb{K}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) = cf'(a)\,.$$

(4) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

(5) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 18.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s+\tilde{s})(x-a) + (r+\tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r+\tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

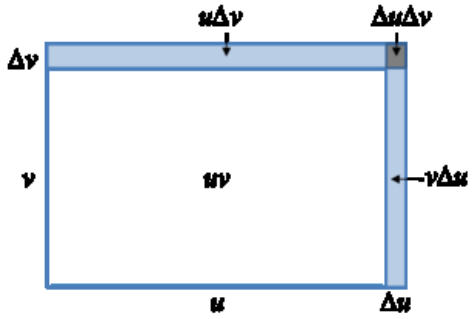
aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{array}{rcl} f(x)g(x) & = & (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)) \\ & & (g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ & = & f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ & & +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ & & +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{array}$$

Aufgrund von Lemma 12.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,.$$

Da g nach Korollar 18.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). □



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängezuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängenzuwächse irrelevant.

Korollar 18.8. *Eine Polynomfunktion*

$$f = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n$$

ist in jedem Punkt differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$f'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + (n-1)c_{n-1} z^{n-2} + n c_n z^{n-1}\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 18.7. □

Satz 18.9. *Seien D und E offene Mengen in $\mathbb{K}$ und seien*

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g\colon\ E \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b = f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 18.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

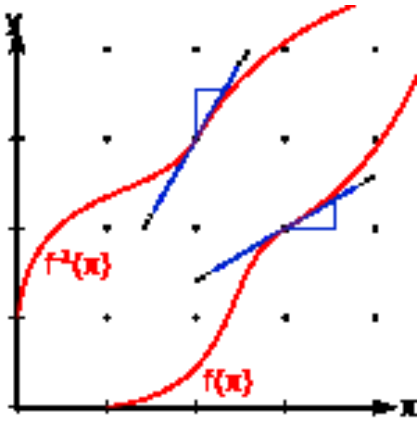
schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} g(f(x)) & = & g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ & = & g(f(a)) + g'(f(a))\,(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ & & +s(f(x))\,(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ & = & g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) \\ & & + (g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x)))\,(x-a). \end{array}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □



Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

Satz 18.10. *Seien D und E offene Mengen in $\mathbb{K}$ und sei*

$$f\colon\ D \longrightarrow E$$

eine bijektive stetige Funktion mit einer stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon\ E \longrightarrow D$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b = f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E\backslash\{b\}$, die gegen b konvergiert. Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von f^{-1} konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

Beispiel 18.11. Die Funktion

$$f^{-1}\colon\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 18.10 gilt daher für $b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 18.10 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

18.4. **Höhere Ableitungen.**

Definition 18.12. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in D$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f'\colon D \longrightarrow \mathbb{K},\, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f.

Definition 18.13. Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f n-mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(z) := (f^{(n-1)})'(z)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

Definition 18.14. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *n-mal stetig differenzierbar* ist, wenn f n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.

18. Arbeitsblatt

18.1. Übungsaufgaben.

Die folgende Aufgabe löse man direkt ohne Ableitungsregeln.

Aufgabe 18.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 18.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 18.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 18.4. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^q,$$

für jedes $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 18.5.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Aufgabe 18.7. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 18.8. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 18.9. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 18.10. Es sei $f(x) = x^3+4x^2-1$ und $g(y) = y^2-y+2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 18.11. Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 18.12. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 18.13.*

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 18.14. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|x|\,,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 18.15. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige, dass

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

Aufgabe 18.16. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt 0. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = z^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

Aufgabe 18.17.* Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z-w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

18.2. **Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie.**

Aufgabe 18.18. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

$$1,\, 11,\, 21,\, 1211,\, 111221,\, 312211,\, \ldots$$

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

18.3. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 18.19. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3-x+2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 18.20. (4 Punkte)

Bestimme, ob die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \overline{z},$$

differenzierbar ist oder nicht.

Aufgabe 18.21. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und seien

$$f_i\colon\ D \longrightarrow \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n\,.$$

Aufgabe 18.22. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 18.23. (4 Punkte)

Es sei

$$F\colon\ D \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine (höhere) Ableitung mit $F^{(n)} = 0$ gibt.

Aufgabe 18.24. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.18 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

18.4. **Die Weihnachtsaufgabe.**

Aufgabe 18.25. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.18 entspricht. Unter einem *Zykel* von f der Länge n verstehen wir ein $x \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(x) = x$ (f^n bezeichnet die n-te Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst) und $f^i(x) \neq x$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Besitzt f Zykel der Länge $n \geq 2$?

(Diese Aufgabe ist gesondert abzugeben, die Deckelregel findet für sie keine Anwendung.)

19. Vorlesung - Mittelwertsatz

In dieser Vorlesung untersuchen wir mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine Funktion

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumverhalten aussieht. Da man nur reelle Zahlen der Größe nach miteinander vergleichen kann, nicht aber komplexe Zahlen, muss die Wertemenge reell sein. Die Definitionsmenge könnte grundsätzlich beliebig sein, und wir werden im zweiten Semester entsprechende Überlegungen für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ anstellen, hier ist aber die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ bzw. ein Teilintervall davon.

Satz 19.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei*

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $a \in D$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist

$$f'(a) = 0\,.$$

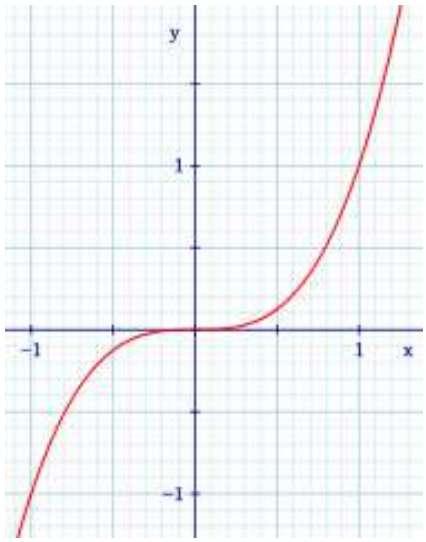
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in a besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a - \epsilon \leq s_n < a$, die gegen a („von unten“) konvergiere. Dann ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n) - f(a)}{s_n - a} \geq 0\,,$$

was sich dann auf den Limes, den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(a) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a + \epsilon \geq t_n > a$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} \leq 0\,.$$

Daher ist auch $f'(a) \leq 0$ und somit ist $f'(a) = 0$. □



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

19.1. **Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.**

Satz 19.2. *Sei $a < b$ und sei*

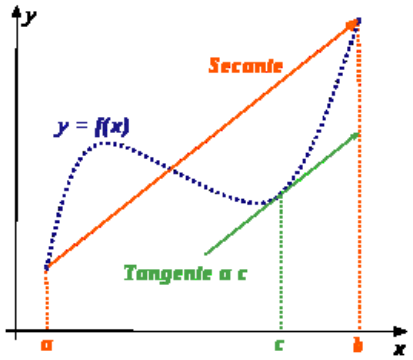
$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$f'(c) = 0\,.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a,b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 13.9 gibt es ein $c \in [a,b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 19.1. □

Der vorstehende Satz heißt *Satz von Rolle.*



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*. Er besagt beispielsweise, dass bei einem differenzierbaren Bewegungsvorgang die Durchschnittsgeschwindigkeit mindestens einmal als Momentangeschwindigkeit auftritt.

Satz 19.3. *Sei $a < b$ und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) \;=\; f(b) - (f(b)-f(a)) \;=\; f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 19.2 und somit gibt es ein $c \in]a,b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

□

Korollar 19.4. *Sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 19.3 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 19.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) ist für alle $x \in I$.*
(2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
(3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x + h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I gibt mit $f(x) > f(x')$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. □

Korollar 19.6. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ lokale Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Intervalle unterteilen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.5. □

19.2. **Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital.**

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

Satz 19.7. *Es sei $b > a$ und seien*

$$f, g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 19.2, angewendet auf die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)\,.$$

□

L'Hospital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

Korollar 19.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I\setminus\{a\},\, x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I\setminus\{a\},\, x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 19.7, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}\,.$$

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. □

Beispiel 19.9. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

19. Arbeitsblatt

19.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 19.1. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 19.2. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 19.3. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3,3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 19.4.*

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 19.5. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 19.6. Führe die Details im Beweis zu Satz 19.7 aus.

Aufgabe 19.7.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe 19.8.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 19.9.*

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 19.10.*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0,1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 19.11. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} |\, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I,\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}\,(I,\mathbb{R})\,,\, f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgabe 19.12. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 19.9).

Aufgabe 19.13. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{x^2+x}$$

im Punkt -1.

Aufgabe 19.14.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 19.15. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{5x^2-3x+4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

19.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 19.16. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 3x^3-7x^2+6x-3.$$

Aufgabe 19.17. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 19.18. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m-n| = 1$ ist.

Aufgabe 19.19. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 19.20. (3 Punkte)

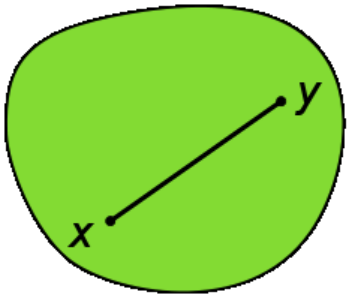
Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

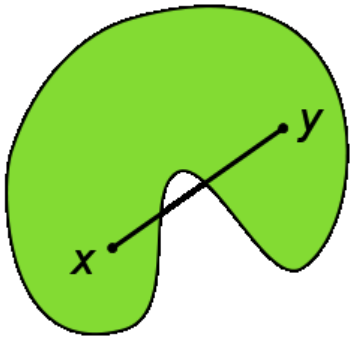
im Punkt 1.

20. Vorlesung - Potenzreihen-Ableitung

20.1. **Konvexe Funktionen.**



Eine konvexe Teilmenge.



Eine nichtkonvexe Teilmenge.

Definition 20.1. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1-r)Q \text{ mit } r \in [0,1]\,,$$

ebenfalls zu T gehört.

Definition 20.2. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man die Menge

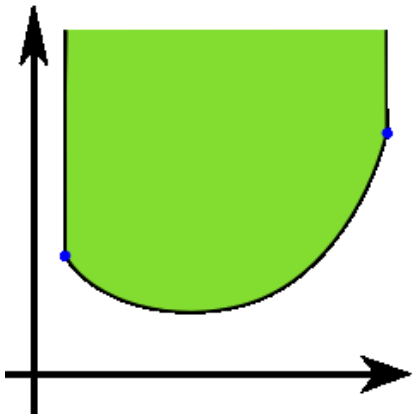
$$S(f) = \{(x,y) \in T \times \mathbb{R} |\, y \leq f(x)\}$$

den *Subgraph* und

$$E(f) = \{(x,y) \in T \times \mathbb{R} |\, y \geq f(x)\}$$

den *Epigraph* der Funktion.

Subgraph und Epigraph sind nach unten bzw. nach oben unbeschränkt. Im Kontext der Integrationstheorie interessiert man sich für den positiven Subgraph, der durch die x-Achse nach unten beschränkt ist. Der Graph der Funktion gehört sowohl zum Subgraph als auch zum Epigraph.



Der Graph und der Epigraph einer konvexen Funktion.

Definition 20.3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *konvex* ist, wenn der Epigraph $E(f)$ konvex ist.

Definition 20.4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *konkav* ist, wenn der Subgraph $E(f)$ konvex ist.

Bei beiden Begriffen muss man lediglich überprüfen, ob die Verbindungsstrecke zwischen je zwei Punkten des Graphen jeweils oberhalb bzw. unterhalb verläuft. Im differenzierbaren Fall gibt es einfache Ableitungskriterien für diese Verhaltensweisen, wobei wir nur den konvexen Fall anführen.

Satz 20.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann eine konvexe Funktion, wenn die Ableitung f' wachsend ist.

Beweis. Sei zunächst f konvex und seien zwei Punkte $a < b$ aus I gegeben. Es sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ die lineare Funktion, die $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$

verbindet. Aufgrund der Konvexität ist $f(x) \leq g(x)$ für $x \in [a,b]$. Für die Differenzenquotienten gilt daher

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &\leq \frac{g(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \\ &= \frac{g(b)-g(x)}{b-x} \\ &= \frac{f(b)-g(x)}{b-x} \\ &\leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Limes für $x \to a$ bzw. $x \to b$ folgt

$$f'(a) \leq \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

Sei nun f als nicht konvex vorausgesetzt und seien zwei Punkte $a < b$ aus I gegeben mit der Eigenschaft, dass die verbindende Gerade von $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ nicht vollständig oberhalb vom Graph von f verläuft. Es gibt also ein $c \in [a,b]$ mit $g(c) < f(c)$, wobei wieder g die verbindende lineare Funktion ist. Durch Übergang zu $f - g$ können wir $f(a) = f(b) = 0$ und $f(c) > 0$ annehmen. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Punkte $s \in [a,c]$ und $t \in [c,b]$ mit $f'(s) > 0$ und $f'(t) < 0$, so dass f' nicht wachsend ist. □

Korollar 20.6. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann eine konvexe Funktion, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.6. □

Die folgende Aussage heißt *Jensensche Ungleichung*.

Satz 20.7. *Es sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Dann ist

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.22. □

Definition 20.8. Es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion und $c \in I$ ein innerer Punkt von I. Man sagt, dass in c ein *Wendepunkt* von f vorliegt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass f auf $[c-\epsilon, c]$ konvex (konkav) und auf $[c, c+\epsilon]$ konkav (konvex) ist.

Für eine zweimal differenzierbare Funktion liegt nach Korollar 20.6 genau dann ein Wendepunkt in $c \in I$ vor, wenn $f''(x) \leq 0$ für $x \in [c-\epsilon, c]$ und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [c, c+\epsilon]$ ist (oder umgekehrt). Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines Wendepunktes ist somit, dass $f''(c) = 0$ ist. Die Funktion $f(x) = x^4$ erfüllt im Nullpunkt dieses notwendige Kriterium, es liegt aber kein Wendepunkt vor.

20.2. **Ableitung von Potenzreihen.**

Satz 20.9. *Es sei*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

konvergent mit demselben Konvergenzradius. Die durch die Potenzreihe g dargestellte Funktion f ist in jedem Punkt $z \in U(a,R)$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \tilde{g}(z)\,.$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_+$, $s < R$, vorgegeben und sei r mit $s < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$ gemäß der Definition von Konvergenzradius. Wegen $n \leq \left(\frac{r}{s}\right)^n$ für n hinreichend groß ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\,s^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|\,s^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n|\,s^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|\,s^{n-1} + \frac{1}{s}\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\,r^n,\end{aligned}$$

so dass die Potenzreihe $\tilde{g}$ in $B(a,s)$ und somit in $U(a,R)$ konvergiert (dafür, dass der Konvergenzradius von $\tilde{g}$ nicht größer als R ist, siehe Aufgabe 20.8). Die Potenzreihe

$$\rho(z) \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$$

ist ebenfalls in dieser Kreisscheibe konvergent, stellt eine nach Korollar 16.9 stetige Funktion dar und besitzt in a den Wert 0. Daher zeigt die Gleichung (von Potenzreihen und dargestellten Funktionen)

$$f(z) \;=\; f(a) + a_1(z-a) + \rho(z)(z-a),$$

dass f in a linear approximierbar, also nach Satz 18.5 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(a) = a_1 = \tilde{g}(a)$. Sei nun $b \in U\,(a, R)$. Nach dem Entwicklungssatz gibt es eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt b,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n\,,$$

deren dargestellte Funktion mit der durch g dargestellten Funktion in einer offenen Umgebung von b übereinstimmt, und wobei

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}$$

gilt. Daher gilt nach dem schon Bewiesenen (angewendet auf h und die formale Potenzreihenableitung $\tilde{h}$)

$$f'(b) \;=\; \tilde{h}(b) \;=\; b_1 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1} \;=\; \tilde{g}(b).$$

□

Korollar 20.10. *Eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion ist in ihrem Konvergenzbereich unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 20.9. □

Satz 20.11. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\; z \longmapsto \exp\, z,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp'(z) = \exp\, z\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 20.9 ist

$$\begin{aligned}
\exp'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \exp z. \end{aligned}$$

□

Korollar 20.12. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.10. □

Korollar 20.13. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Beweis. Nach Aufgabe 17.10 ist

$$x^\alpha = \exp\left(\alpha \ \ln x\right)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 20.11 und Korollar 20.12 gleich

$$(x^\alpha)' = \left(\exp\left(\alpha \ \ln x\right)\right)' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp\left(\alpha \ \ln x\right) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Korollar 20.14. *Für die eulersche Zahl gilt die Gleichheit*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp 1.$$

Beweis. Die äußeren Gleichheiten sind Definitionen. Aufgrund von Korollar 20.12 ist $\ln'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \exp 1 &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e. \end{aligned}$$

□

Satz 20.15. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(z) = \cos z$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \cos z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(z) = -\sin z\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.14. □

20. Arbeitsblatt

20.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 20.1. Es seien

$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvexe Funktionen. Zeige, dass die Summe $f+g$ ebenfalls konvex ist.

Aufgabe 20.2. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $-f$ konkav ist.

Aufgabe 20.3. Es seien

$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass die Differenz $f-g$ konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.4. Es seien

$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass das Produkt fg konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.5. Es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für jedes Punktepaar $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit $a, b \in I$ die Verbindungsstrecke oberhalb des Graphen von f verläuft.

(Bemerkung: Eine konvexe Funktion auf einem offenen Intervall ist übrigens immer stetig.)

Aufgabe 20.6. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann eine konvexe Funktion ist, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 20.7. Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit ungeradem Grad ≥ 3. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.8. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls R ist.

Aufgabe 20.9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2 \cdot \exp\left(z^3 - 4z\right).$$

Aufgabe 20.10. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln :\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 20.11. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 20.12. Es sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 20.13. Berechne bis auf drei Nachkommastellen den Wert von e^i.

Aufgabe 20.14. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 20.9.

Aufgabe 20.15. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 15.10 (4).

Aufgabe 20.16. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 20.17.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x)\,.$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

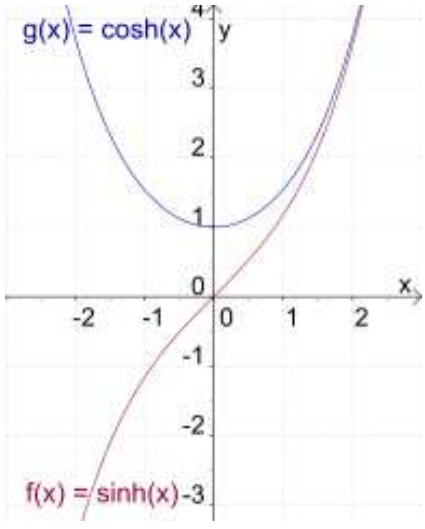
b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 20.18. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto (\sin z)(\cos z).$$

Aufgabe 20.19. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto (\sin z)^n.$$



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen im Reellen.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\sinh\, z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cosh\, z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

Aufgabe 20.20. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus (dabei ist $z \in \mathbb{C}$.)

(1)
$$\cosh\, z + \sinh\, z = e^z\,.$$

(2)
$$\cosh\, z - \sinh\, z = e^{-z}\,.$$

(3)
$$(\cosh\, z)^2 - (\sinh\, z)^2 = 1\,.$$

(4)
$$\cosh\, iz = \cos\, z \text{ und } \sinh\, iz = i \cdot \sin\, z\,.$$

Aufgabe 20.21. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

20.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 20.22. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Zeige die Jensensche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Aufgabe 20.23. (3 Punkte)

Bestimme das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x + 5\,.$$

Aufgabe 20.24. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine ungerade Funktion, die nicht linear sei. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.25. (1 Punkt)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin\,(\cos\, z\,)\,.$$

Aufgabe 20.26. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^x.$$

21. Vorlesung - π

21.1. Die Zahl π.

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven“) entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 21.1. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos\, x \,= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned}
\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots \\
&= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{4}{3\cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7\cdot 8}\right) - \dots \\
&= 1 - 2(2/3) - \dots
\end{aligned}$$

$$\leq \ -1/3.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 20.15

$$\cos{}'x = -\sin x \ .$$

Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0,2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 19.5 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0,2]$ gilt

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
&= x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \dots \\
&\geq x\left(1 - \frac{4}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{4}{6\cdot 7}\right) + \dots \\
&\geq x/3 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

□

Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

Definition 21.2. Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0,2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2s \, .$$

Im weiteren Verlauf dieses Kurses werden wir sehen, dass die so definierte Zahl mit der Kreiszahl übereinstimmt, dass also der Umfang eines Kreises mit Radius r gleich $2\pi r$ und sein Flächeninhalt gleich πr^2 ist.

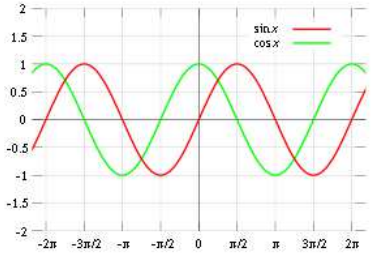
Satz 21.3. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{C}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos(z+2\pi) = \cos z$ *und* $\sin(z+2\pi) = \sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(2) *Es ist* $\cos(z+\pi) = -\cos z$ *und* $\sin(z+\pi) = -\sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(3) *Es ist* $\cos(z+\pi/2) = -\sin z$ *und* $\sin(z+\pi/2) = \cos z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(4) *Es ist* $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$ *und* $\cos 2\pi = 1$.
(5) *Es ist* $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$ *und* $\sin 2\pi = 0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

ist $(\sin \frac{\pi}{2})^2 = 1$, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 21.1. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). □



Korollar 21.4. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.3. □

21.2. **Polarkoordinaten für** $\mathbb{C}$.

Satz 21.5. *Die komplexe Exponentialfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $e^z = e^{z+2\pi i}$.
(2) *Es ist* $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*

(3) *Es ist* $e^z = e^w$ *genau dann, wenn* $z - w = 2\pi i n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$ *ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 15.10, aus Satz 21.3 und aus Satz 15.7. □

Insbesondere gilt also die berühmte Formel

$$e^{2\pi i} = 1\,.$$

Aus der *Eulerschen Gleichung*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

kann man ebenso die Gleichung $e^{\pi i} = -1$ bzw. $e^{\pi i} + 1 = 0$ ablesen, die die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik enthält.

Satz 21.6. *Zu jeder komplexen Zahl* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *gibt es eine eindeutige Darstellung*

$$z = r \cdot \exp(i\varphi) = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$ *und mit* $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Beweis. Wegen Satz 15.10 ist

$$|z| = |r|\left|e^{i\varphi}\right| = |r| = r,$$

d.h. r ist als Betrag der komplexen Zahl z festgelegt. Wir können durch den Betrag teilen und können dann davon ausgehen, dass eine komplexe Zahl $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und mit $a^2 + b^2 = 1$ vorliegt. Es ist dann zu zeigen, dass es eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

gibt. Bei $a = 1$ (bzw. -1) ist $b = 0$ und $\varphi = 0$ (bzw. $\varphi = \pi$) ist die einzige Lösung. Wir zeigen, dass es für ein gegebenes $a \in]-1, 1[$ stets genau zwei Möglichkeiten für φ mit $a = \cos\varphi$ gibt, und eine davon wird durch das Vorzeichen von b ausgeschlossen. Bei $b \geq 0$ gibt es aufgrund von Korollar 21.4 ein eindeutiges $\varphi \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\varphi$. Für dieses gilt $b = \sin\varphi$ wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $b \geq 0$. Bei $b < 0$ gibt es wiederum ein eindeutiges $\theta \in [0, \pi]$ mit $a = \cos\theta$. Wegen $\sin\theta \geq 0$ ist dies aber keine Lösung für beide Gleichungen. Stattdessen erfüllt $\varphi := 2\pi - \theta$ beide Gleichungen. □

Die in diesem Satz beschriebene Darstellung für eine komplexe Zahl heißen ihre *Polarkoordinaten.* Zu $z = x + iy$ heißt r der *Betrag* und φ das *Argument* (oder der *Winkel*) von z.

Der Satz sagt insbesondere, dass die Abbildung

$$[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \varphi \longmapsto (\cos\varphi, \sin\varphi),$$

eine Parametrisierung des Einheitskreises liefert. Zu φ gehört also ein eindeutig bestimmter Punkt des Einheitskreises. Wir werden später sehen, dass φ die Länge des Kreisbogens zwischen $(1, 0)$ und dem Punkt $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ist. Das bedeutet, dass φ der Winkel im Bogenmaß ist. Die Grundidee des

Winkels ist es, eine Paar aus zwei Halbgeraden gleichmäßig unterteilen zu können. Diese Homogenitätseigenschaft wird durch das Argument φ erfüllt.

Lemma 21.7. *Seien $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$. Dann hängt der (euklidische) Abstand zwischen*

$$(\cos\,\varphi\,,\,\sin\,\varphi\,) \text{ und } (\cos\,(\varphi+\psi)\,,\sin\,(\varphi+\psi))$$

nur von ψ ab. Insbesondere wird der Kreisbogen zwischen

$$(1,0) \text{ und } (\cos\,\varphi\,,\,\sin\,\varphi\,)$$

durch

$$(\cos\left(\frac{i}{n}\varphi\right),\sin\left(\frac{i}{n}\varphi\right)),\ i=0,\dots,n\,,$$

durch $n+1$ Punkte unterteilt, derart, dass benachbarte Punkte den gleichen Abstand besitzen.

Beweis. Der euklidische Abstand zwischen den beiden Punkten ist

$$\sqrt{(\cos\,(\varphi+\psi)-\,\cos\,\varphi\,)^2+(\sin\,(\varphi+\psi)-\,\sin\,\varphi\,)^2}\,.$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme kann man den Radikanden umformen zu

$$\begin{array}{ll} & (\cos\,\varphi\,\cos\,\psi-\sin\,\varphi\,\sin\,\psi-\cos\,\varphi\,)^2+(\sin\,\varphi\,\cos\,\psi+\sin\,\psi\,\cos\,\varphi-\sin\,\varphi\,)^2 \\ = & \cos^2\,\varphi\,\cos^2\,\psi+\sin^2\,\varphi\,\sin^2\,\psi+\cos^2\,\varphi+\sin^2\,\varphi\,\cos^2\,\psi+\sin^2\,\psi\,\cos^2\,\varphi+\sin^2\,\varphi \\ & -2\cos\,\varphi\,\cos\,\psi\,\sin\,\varphi\,\sin\,\psi-2\cos^2\,\varphi\,\cos\,\psi+2\sin\,\varphi\,\sin\,\psi\,\cos\,\varphi \\ & +2\sin\,\varphi\,\cos\,\psi\,\sin\,\psi\,\cos\,\varphi-2\sin^2\,\varphi\,\cos\,\psi-2\sin\,\varphi\,\sin\,\psi\,\cos\,\varphi \\ = & 1-2\cos\,\psi+\cos^2\,\psi+\sin^2\,\psi \\ = & 2-2\cos\,\psi\,. \end{array}$$

□

Korollar 21.8. *Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ist*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\,.$$

Zwei komplexe Zahlen $\neq 0$ werden also miteinander multipliziert, indem man ihre Beträge in $\mathbb{R}_+$ multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.

Beweis. Die Aussage ist ein Spezialfall von Satz 15.7, die Interpretation als Winkel beruht auf Satz 21.6. □

21.3. **Wurzeln aus komplexen Zahlen.**

Korollar 21.9. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine komplexe Zahl w mit*

$$w^n = z\,.$$

Beweis. Bei $z = 0$ ist $w = 0$ eine Lösung, sei also $z \neq 0$. Nach Satz 21.6 gibt es eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r \in \mathbb{R}_+$. Es sei $s = r^{1/n}$ die reelle n-te Wurzel von r, die nach Satz 13.6 existiert. Wir setzen

$$w = se^{\frac{i\varphi}{n}}.$$

Dann ist nach Satz 15.7

$$w^n = (se^{\frac{i\varphi}{n}})^n = s^n(e^{\frac{i\varphi}{n}})^n = re^{n\frac{i\varphi}{n}} = re^{i\varphi} = z.$$

□

Diese letzte Aussage besagt, dass jedes Polynom der Form $X^n - z$ in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Insofern handelt es sich dabei um eine Vorstufe für den Fundamentalsatz der Algebra. Ein wichtiger Spezialfall liegt bei $z = 1$ vor. Man spricht von *komplexen Einheitswurzeln.*

Definition 21.10. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann heißen die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

n-te *komplexe Einheitswurzeln.*

Die 1 ist für jedes n eine n-te komplexe Einheitswurzel, und die -1 ist für jedes gerade n eine n-te komplexe Einheitswurzel.

Lemma 21.11. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ über $\mathbb{C}$ sind*

$$e^{2\pi ik/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt die Faktorisierung

$$X^n - 1 = (X-1)(X - e^{2\pi i/n})\cdots(X - e^{2\pi i(n-1)/n})$$

Beweis. Es ist

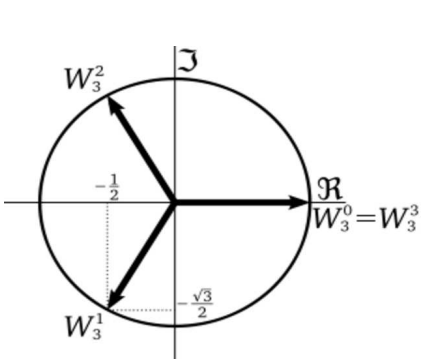
$$(e^{2\pi ik/n})^n = e^{2\pi ik} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1.$$

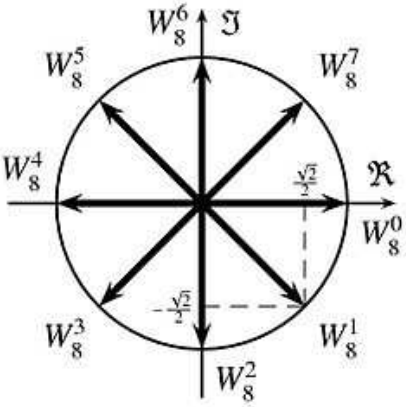
Die angegebenen komplexen Zahlen sind also wirklich Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Diese Nullstellen sind alle untereinander verschieden, da aus

$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n}$$

mit $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$ sofort durch betrachten des Quotienten $e^{2\pi i(\ell-k)/n} = 1$ folgt, und daraus $\ell - k = 0$. Es gibt also n explizit angegebene Nullstellen und daher müssen dies alle Nullstellen des Polynoms sein. Die explizite Beschreibung in Koordinaten folgt aus der eulerschen Formel. □

Es gibt also insbesondere genau n n-te komplexe Einheitswurzel. Die komplexen Einheitswurzeln bilden nach Lemma 21.7 die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, wobei die Eckpunkte auf dem Einheitskreis liegen und $(1, 0)$ dazugehört.





21. Arbeitsblatt

21.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 21.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \tan\, z\, = \frac{\sin\, z}{\cos\, z}.$$

Was ist die Definitionsmenge D des *Tangens*?

Aufgabe 21.2.*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin\, \frac{\pi}{4}\ =\ \cos\, \frac{\pi}{4}\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos\, \frac{\pi}{3}\ =\ \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin\, \frac{\pi}{3}\ =\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 21.3. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgrund von Korollar 21.4 ist die reelle Sinusfunktion und die reelle Kosinusfunktion bijektiv auf gewissen Intervallen. Die Umkehrfunktionen heißen folgendermaßen.

Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ x \longmapsto \arcsin\, x\,,$$

und heißt *Arcus-Sinus*.

Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi],\ x \longmapsto \arccos\, x\,,$$

und heißt *Arcus-Kosinus*.

Aufgabe 21.4. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 21.6.*

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass es zu jedem λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

Aufgabe 21.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 21.8. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 21.9.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, \, n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 21.10. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 21.11.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 21.12. Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto (\sin x)^n,$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. An welchen Punkten existiert die Grenzfunktion, an welchen ist sie stetig, an welchen differenzierbar? Wie verhält sich die abgeleitete Funktionenfolge, also $g_n(x) = f_n'(x)$?

Aufgabe 21.13. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn} .$$

Zeige, dass für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 21.14. Es sei $F = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ eine komplexe auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe und $n \in \mathbb{N}_+$. Für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ gelte $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $c_i = 0$ für alle i gilt, die kein Vielfaches von n sind.

Aufgabe 21.15.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine n-te komplexe Einheitswurzel. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass die Ableitung die Beziehung $f'(\zeta z) = \zeta^{-1} f'(z)$ erfüllt.

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe für gerade und ungerade Funktionen?

Aufgabe 21.16. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion

$$g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(2) Für alle n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

21.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 21.17. (3 Punkte)

Bestimme die Intervalle, auf denen die reelle Sinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

konvex bzw. konkav ist.

Aufgabe 21.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

unendlich viele isolierte lokale Maxima und unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

Aufgabe 21.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

die unendlich viele Nullstellen und unendlich viele isolierte lokale Maxima besitzt, deren Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 21.20. (6 Punkte)

Zeige, dass es keine stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzt derart, dass zwischen je zwei Nullstellen ein lokales Maximum existiert, dessen Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 21.21. (6 Punkte)

Es sei $z_n \in \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen, die wir in Polarkoordinaten als

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

mit $r_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi[$ schreiben. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt.

(1) Die Folge r_n konvergiert gegen 0.
(2) Die beiden Folgen r_n und φ_n konvergieren (in $\mathbb{R}$).
(3) Die Folge r_n konvergiert und die Folge φ_n besitzt die Punkte 0 und 2π als einzige Häufungspunkte.

Aufgabe 21.22. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

22. Vorlesung - Taylor-Entwicklung

Zu einer konvergenten Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

bilden die „Teilpolynome“

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

22.1. **Die Taylor-Formel.**

Brook Taylor (1685-1731)

Eine konvergente Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ ist in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen im Punkt a lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Es ist ja

$$f(a) = c_0,\ f'(a) = c_1,\ f''(a) = 2c_2,\ f'''(a) = 6c_3$$

und allgemein

$$f^{(k)}(a) \ = \ (k!)c_k.$$

Umgekehrt kann man aus den Ableitungen die Koeffizienten der Potenzreihe durch

$$c_k \ = \ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

zurückgewinnen. Dabei ist die rechte Seite unabhängig davon definiert, ob eine Potenzreihe vorliegt, so lange die Funktion nur hinreichend oft differenzierbar ist. Man gewinnt daher über die Ableitungen gute Kandidaten für polynomiale Approximationen, nämlich die *Taylor-Polynome*.

Definition 22.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f\colon\ U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[19] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Beispiel 22.2. Wir möchten für die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto x \sin x\,,$$

das Taylor-Polynom der Ordnung 4 im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{4}$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x \cos x\,, \\ f''(x) &= \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x\,, \\ f'''(x) &= -2 \sin x - \sin x - x \cos x = -3 \sin x - x \cos x\,, \\ f''''(x) &= -3 \cos x - \cos x + x \sin x = -4 \cos x + x \sin x\,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist somit

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{8-\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-3-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-12-\pi}{4\sqrt{2}}, \\ f''''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-4+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-16+\pi}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist daher

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{4+\pi}{4\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{8-\pi}{8\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{-12-\pi}{24\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{-16+\pi}{96\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4.$$

Die folgende *Taylor-Formel* macht eine Aussage über die Güte der Approximation einer Funktion durch ihre Taylorpolynome. Wir beschränken uns auf die reelle Situation. Bei $n = 0$ handelt es sich einfach um den Mittelwertsatz.

[19] Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n. Man spricht häufig auch von der Ordnung des Taylor-Polynoms.

Satz 22.3. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Sei $x \neq a$ fixiert. In Anlehnung an die zu beweisende Aussage betrachten wir zu $r \in \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$g_r(u) := f(x) - f(u) - f'(u)\cdot(x-u) - \frac{f^{(2)}(u)}{2!}(x-u)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n - \frac{r}{(n+1)!}(x-u)^{n+1},$$

den wir als Funktion in $u \in I$ auffassen. Es ist $g_r(x) = 0$ und wir wählen r so, dass $g_r(a) = 0$ ist, was möglich ist. Die Funktion $g(u) := g_r(u)$ ist auf dem Teilintervall $]a,x[\subseteq I$ (bzw. $]x,a[$, falls $x < a$ ist) differenzierbar (nach u) und besitzt an den beiden Intervallgrenzen den Wert 0. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in]a,x[$ mit $g'(c) = 0$.

Aufgrund der Produktregel und der Kettenregel ist (Ableitung nach u)

$$\left(\frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k\right)' = \frac{f^{(k+1)}(u)}{k!}(x-u)^k - \frac{f^{(k)}(u)}{(k-1)!}(x-u)^{k-1}\,.$$

Daher heben sich in der Ableitung von g die meisten Terme weg und es ergibt sich

$$g'(u) = -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n + \frac{r}{n!}(x-u)^n\,.$$

Aus der Gleichung

$$0 \;=\; g'(c) \;=\; -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{r}{n!}(x-c)^n$$

folgt $r = f^{(n+1)}(c)$. Wenn wir dies und $u = a$ in die Anfangsgleichung einsetzen und $g_r(a) = 0$ ausnutzen, so ergibt sich die Behauptung. □

Eine gute Approximation für die Funktion erhält man daraus, wenn man den Betrag der $(n+1)$-ten Ableitung abschätzen kann.

Korollar 22.4. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$|\, f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \,| \leq \frac{B}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}\ .$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 13.9, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 22.3. □

22.2. **Anwendung auf Extrema.**

Satz 22.5. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein lokales Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

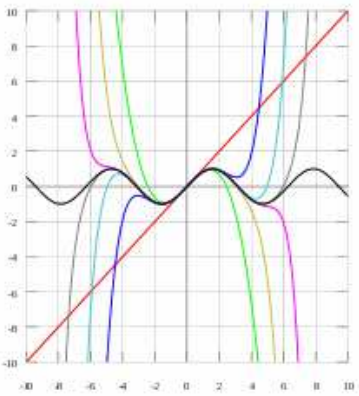
Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c (abhängig von x) zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x)-f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. □

Für Polynome und allgemeiner für Funktionen, die durch eine Potenzreihe gegeben sind, lässt sich also stets allein unter Bezug auf die Ableitungen entscheiden, ob in einem Punkt ein lokales Extremum vorliegt. Bei Potenzreihen beruht dies auf dem Identitätssatz.

22.3. **Die Taylor-Reihe.**



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 22.6. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 22.7. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit einem positivem Konvergenzradius r und*

$$f\colon U(a,r) \longrightarrow \mathbb{K}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt a stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 20.9 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt a. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in a den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 20.9. □

Korollar 22.8. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und sei $b \in U(a, R)$. Dann erhält man die umentwickelte Reihe im Entwicklungspunkt b als Taylor-Reihe von f in b. Insbesondere konvergiert die Taylor-Reihe in b mit einem Konvergenzradius $\geq R - |a - b| > 0$.

Beweis. Nach dem Entwicklungssatz wird die Funktion f in einer offenen Umgebung von b durch eine Potenzreihe beschrieben. Somit folgt die Aussage aus Satz 22.7. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Taylor-Reihe existieren und auch konvergieren kann, ohne dass dadurch die vorgegebene Funktion dargestellt wird (sie kann auch existieren ohne zu konvergieren).

Beispiel 22.9. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets 0 ist (siehe Aufgabe 22.11 und Aufgabe 22.12). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert 0 und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

22. Arbeitsblatt

22.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 22.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin z \, \cos z\,,$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 22.2. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 22.3. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Punkt $a = 3$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.4.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 22.5.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.6.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.7.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.8. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 22.9. Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$

in der neuen Variablen $z - 2$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylorpolynom im Entwicklungspunkt 2.

Aufgabe 22.10. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 22.11. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 22.12. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

Aufgabe 22.13. Bestimme den Wendepunkt der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto e^{-\frac{1}{x}}.$$

Aufgabe 22.14. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

22.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 22.15. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome bis zum Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin\,(\cos\,z\,) + z^3 \exp\left(z^2\right).$$

Aufgabe 22.16. (4 Punkte)

Bestimme das Polynom

$$f(z) \;=\; z^3 + (4-i)z^2 - 2iz + 5.$$

in der neuen Variablen $z - 1 - i$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylorpolynom im Entwicklungspunkt $1 + i$.

Aufgabe 22.17. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon\, [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sin\,x\;\cos\,x\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 22.18. (6 Punkte)

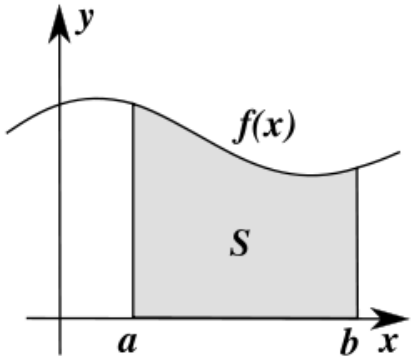
Sei ϵ, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{3}$, vorgegeben. Zeige, dass es eine unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq 0\,, \\ 1 \text{ für } x \geq \epsilon \text{ und } x \leq 1 - \epsilon\,, \\ 0 \text{ für } x \geq 1\,. \end{cases}$$

23. Vorlesung - Integrierbarkeit

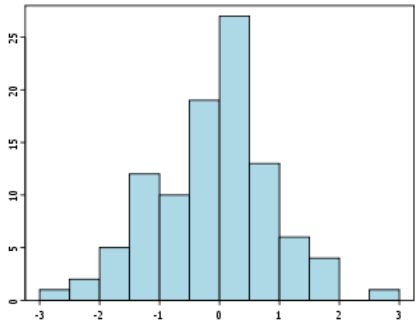


In den folgenden Vorlesungen beschäftigen wir uns mit der *Integrationstheorie*, d.h. wir wollen den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch einen Funktionsgraphen einer Funktion

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und der x-Achse begrenzt wird, systematisch studieren und berechnen. Zugleich ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Auffinden von *Stammfunktionen*, das sind Funktionen, deren Ableitung f ist. Der Flächeninhalt ist kein unproblematischer Begriff, den wir erst im dritten Semester im Rahmen der *Maßtheorie* grundlegend behandeln werden. Dennoch handelt es sich um einen intuitiv leicht zugänglichen Begriff, von dem wir hier nur einige wenige naheliegende Grundtatsachen verwenden. Sie dienen hier auch nirgendwo der Argumentation, sondern lediglich der Motivation. Ausgangspunkt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit gegebenen Seitenlängen einfach das Produkt der beiden Seitenlängen ist, und dass der Flächeninhalt einer Fläche, die man mit Rechtecken „ausschöpfen“ kann, als der Limes der Summe der beteiligten Rechtecksinhalte erhalten werden kann. Beim *Riemannschen Integral*, das zumindest für stetige Funktionen eine befriedigende Theorie liefert, beschränkt man sich auf solche Rechtecke, die parallel zum Koordinatensystem liegen, deren Breite (Grundseite auf der x-Achse) beliebig varieren darf und deren Höhe in Beziehung zu den Funktionswerten über der Grundseite steht. Dadurch werden die Funktionen durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximiert.

23.1. **Treppenfunktionen.**



Eine Treppenfunktion. Im statistischen Kontext spricht man von Histogrammen oder von Säulendiagrammen.

Definition 23.1. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion

$$t\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I derart gibt, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Diese Definition stellt also keine Bedingung an den Wert der Funktion an den Unterteilungspunkten. Das Intervall $]a_{i-1}, a_i[$ nennt man i-tes Teilintervall, und $a_i - a_{i-1}$ heißt Länge dieses Teilintervalls. Wenn die Länge der Teilintervalle konstant ist, so spricht man von einer *äquidistanten Unterteilung*.

Definition 23.2. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und sei

$$t\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

das *Treppenintegral* von t auf I.

Das Treppenintegral wird auch mit $\int_a^b t(x)\,dx$ bezeichnet. Bei einer äquidistanten Unterteilung mit der Teilintervalllänge $\frac{b-a}{n}$ ist das Treppenintegral gleich $\frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^{n} t_i)$. Das Treppenintegral ist nicht von der gewählten Unterteilung abhängig, bezüglich der eine Treppenfunktion vorliegt (man kann also die Unterteilung verfeinern).

Definition 23.3. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt eine Treppenfunktion

$$t\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$ ist für alle $x \in I$. Eine Treppenfunktion

$$s\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *untere Treppenfunktion* zu f, wenn $s(x) \leq f(x)$ ist für alle $x \in I$.

Eine obere (untere) Treppenfunktion zu f gibt es genau dann, wenn f nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Definition 23.4. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder oberen Treppenfunktion

$$t\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Obersumme* (oder ein *oberes Treppenintegral*) von f auf I.

Definition 23.5. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder unteren Treppenfunktion

$$s\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt

$$S := \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Untersumme* (oder ein *unteres Treppenintegral*) von f auf I.

Verschiedene obere (untere) Treppenfunktionen liefern natürlich verschiedene Obersummen (Untersummen).

Definition 23.6. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach oben beschränkte Funktion. Dann heißt das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f das *Oberintegral* von f.

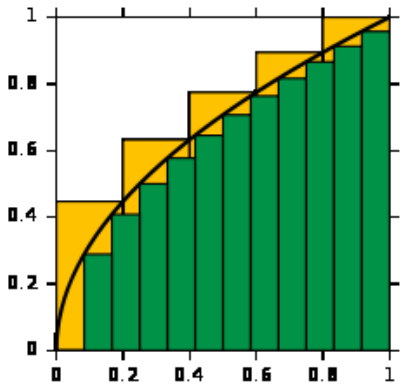
Definition 23.7. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach unten beschränkte Funktion. Dann heißt das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

Die Beschränkung nach unten stellt sicher, dass es überhaupt eine untere Treppenfunktion gibt und damit die Menge der Untersummen nicht leer ist. Unter dieser Bedingung allein muss nicht unbedingt die Menge der Untersummen ein Supremum besitzen. Für (beidseitig) beschränkte Funktionen existiert hingegen stets das Ober- und das Unterintegral. Bei einer gegebenen Unterteilung gibt es eine kleinste obere (größte untere) Treppenfunktion, die durch die Suprema (Infima) der Funktion auf den Teilintervallen festgelegt ist (bei stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind das Maxima bzw. Minima). Für das Integral muss man aber Treppenfunktionen zu sämtlichen Unterteilungen berücksichtigen.

23.2. **Riemann-integrierbare Funktionen.**



Eine untere und eine obere Treppenfunktion. Der grüne Flächeninhalt ist eine Untersumme und der gelbe Flächeninhalt (teilweise verdeckt) ist eine Obersumme.

Definition 23.8. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Definition 23.9. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f\colon\ I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

heißt das Oberintegral (das nach Definition mit dem Unterintegral übereinstimmt) das *bestimmte Integral* von f über I. Es wird mit

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ oder mit } \int_I f(t)\,dt$$

bezeichnet.

Das Berechnen von solchen Integralen nennt man *integrieren*. Man sollte sich keine allzu großen Gedanken über das Symbol dt machen. Darin wird ausgedrückt, bezüglich welcher Variablen die Funktion zu integrieren ist. Es kommt dabei aber nicht auf den Namen der Variablen an, d.h. es ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

Lemma 23.10. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von unteren Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von oberen Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Dann ist f Riemann-integrierbar, und das bestimmte Integral ist gleich diesem Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

Beweis. Siehe Aufgabe 23.11. □

Beispiel 23.11. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^2,$$

die bekanntlich in diesem Intervall streng wachsend ist. Für ein Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ ist daher $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum der Funktion über diesem Teilintervall. Sei n eine positive natürliche Zahl. Wir unterteilen das Intervall $[0,1]$ in die n gleichlangen Teilintervalle

$$\left[i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}\right], i = 0, \ldots, n-1,$$

der Länge $\frac{1}{n}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen unteren Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(i\frac{1}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

(siehe Aufgabe 1.6 für die Formel für die Summe der Quadrate). Da die beiden Folgen $(1/2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1/6n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist der Limes für $n \to \infty$ von diesen Treppenintegralen gleich $\frac{1}{3}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen oberen Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left((i+1)\frac{1}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right) \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

Der Limes davon ist wieder $\frac{1}{3}$. Da beide Limiten übereinstimmen, müssen nach Lemma 23.10 überhaupt das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, so dass die Funktion Riemann-integrierbar ist und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t^2\,dt \;=\; \frac{1}{3}$$

ist.

Lemma 23.12. *Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ derart gibt, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind. In dieser Situation gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,dt\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 23.13. □

Definition 23.13. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgrund des obigen Lemmas stimmen für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ die beiden Definitionen überein. Die Integrierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet nicht, dass $\int_R f(x)dx$ eine Bedeutung hat bzw. existieren muss.

23.3. **Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.**

Satz 23.14. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir können annehmen, dass das Intervall kompakt ist, sagen wir $I = [a, b]$. Die stetige Funktion f ist auf diesem kompakten Intervall beschränkt nach Korollar 13.10. Daher gibt es obere und untere Treppenfunktionen und daher existieren Oberintegral und Unterintegral. Wir müssen zeigen, dass sie übereinstimmen. Dazu genügt es, zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ eine untere und eine obere Treppenfunktion für f anzugeben derart, dass die Differenz ihrer Treppenintegrale $\leq \epsilon$ ist. Nach Lemma 14.2 ist f gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, x' \in I$ mit $d(x, x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon'$ gilt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{n} \leq \delta$ ist, und betrachten wir die Unterteilung des Intervalls mit den Punkten $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Auf den Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$, ist der Abstand zwischen dem Maximum

$$t_i = \max\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

und dem Minimum

$$s_i = \min\ \left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

kleiner/gleich ϵ'. Die zu diesen Werten gehörigen Treppenfunktionen, also

$$t(x) := \begin{cases} t_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ t_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

und

$$s(x) := \begin{cases} s_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ s_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

sind dann eine obere bzw. untere Treppenfunktion zu f. Die Differenz zwischen den zugehörigen Ober- und Untersummen ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{b-a}{n} \;=\; \sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i)\frac{b-a}{n} \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \epsilon' \frac{b-a}{n} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} \;=\; \epsilon.$$

□

Diese Aussage gilt dann auch für stückweise stetige Funktionen.

Wenn man Aussagen beweist, bei denen auf Unterteilungen eines Intervalls Bezug genommen wird, so ist es häufig sinnvoll, *feinere Unterteilungen* einzuführen. Insbesondere ersetzt man häufig zwei verschiedene Unterteilungen durch eine gemeinsame Verfeinerung.

Lemma 23.15. *Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.*
(2) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.*
(3) *Die Summe $f+g$ ist Riemann-integrierbar und es ist $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.*
(4) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.*
(5) *Die Funktionen $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ sind Riemann-integrierbar.*
(6) *Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar.*
(7) *Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Für (1) bis (4) siehe Aufgabe 23.14. (5). Wir betrachten die Aussage für das Maximum. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine obere und eine untere Treppenfunktion gibt derart, dass die Differenz der beiden Treppenintegrale $\leq \epsilon$ ist. Sei also ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit gibt es Treppenfunktionen

$$s_1 \text{ und } t_1 \text{ mit } s_1 \leq f \leq t_1 \text{ und mit } \int_a^b (t_1 - s_1)(x)\,dx \leq \epsilon/2$$

und

$$s_2 \text{ und } t_2 \text{ mit } s_2 \leq g \leq t_2 \text{ und mit } \int_a^b (t_2 - s_2)(x)\,dx \leq \epsilon/2\,.$$

Wir können annehmen, dass diesen Treppenfunktionen die gleiche Unterteilung zugrunde liegt. Es sei ℓ_k, $k = 1,\ldots,n$ die Länge des k-ten Teilintervalls I_k und es sei

$$\delta_k := (t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \ell_k \delta_k &= \sum_{k=1}^n \ell_k((t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}) \\
&= \sum_{k=1}^n \ell_k (t_1 - s_1)|_{I_k} + \sum_{k=1}^n \ell_k (t_2 - s_2)|_{I_k} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$s := \max(s_1, s_2) \text{ und } t := \max(t_1, t_2)\,.$$

Dies ist offenbar eine untere bzw. obere Treppenfunktionen für $\max(f,g)$. Wir betrachten ein Teilintervall I_k der gegebenen Unterteilung. Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_1 \leq t_2$$

gilt, so ist

$$t - s = t_2 - s_2 \leq \delta_k.$$

Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_2 \leq t_1$$

gilt, so ist ebenfalls

$$t - s = t_1 - s_2 \leq t_1 - s_1 \leq \delta_k.$$

Dies gilt auch in den beiden anderen Fällen. Damit ist die Differenz der Treppenintegrale $\leq \sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_k \leq \epsilon$. (6) folgt direkt aus (5). Für (7) siehe Aufgabe 23.21. □

23. Arbeitsblatt

23.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 23.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3, +4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,, \\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,, \\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,, \\ 13, \text{ falls } t = -\frac{1}{2}\,, \\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,, \\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,, \\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 23.2.*

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 23.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.4. Es seien

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f + g$,

(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f,g)$,
(4) $\min(f,g)$,

Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 23.5. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine Treppenfunktion und

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.6. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.7. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 t^3\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.8. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^7 -t^3+3t^2-2t+5\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.9.*

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x dx \;=\; e-1.$$

Aufgabe 23.10. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 23.11. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \ = \ \int_a^b f(x)\,dx \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

gilt.

Aufgabe 23.12. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 23.13. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Aufgabe 23.14. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon\ I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 23.15. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

gilt.

23.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 23.16. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2\,dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

und einer Treppenfunktion

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.18. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Aufgabe 23.19. (8 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.20. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

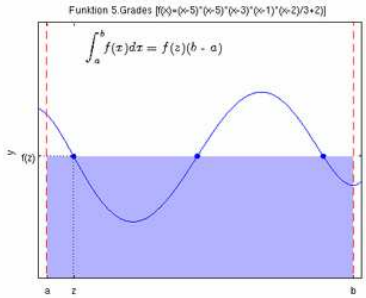
Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, dass es aber keine Treppenfunktion s mit der Eigenschaft gibt, dass $|s(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in [0,1]$ ist.

Aufgabe 23.21. (6 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

24. Vorlesung - Hauptsatz

24.1. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung.



Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man

$$\frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$$

als die Durchschnittshöhe der Funktion ansehen, da dieser Wert mit der Länge $b - a$ des Grundintervalls multipliziert den Flächeninhalt ergibt. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* besagt, dass für eine stetige Funktion dieser Durchschnittswert (oder Mittelwert) von der Funktion auch angenommen wird.

Satz 24.1. *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)\,.$$

Beweis. Über dem kompakten Intervall ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion, die aufgrund von Satz 13.9 angenommen werden. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m,M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = d$. □

24.2. **Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.**

Es ist geschickt auch Integralgrenzen zuzulassen, bei denen die untere Integralgrenze die obere Intervallgrenze und die obere Integralgrenze die untere Intervallgrenze ist. Dazu definieren wir für $a < b$ und eine integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Definition 24.2. Sei I ein reelles Intervall und sei

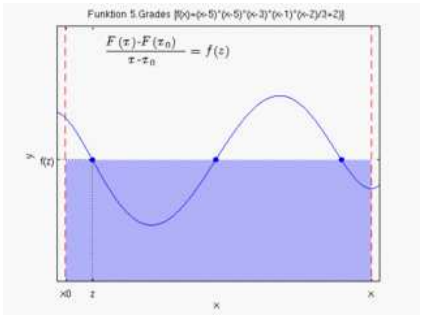
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

die *Integralfunktion* zu f zum Startpunkt a.

Man spricht auch von der *Flächenfunktion* oder einem *unbestimmten Integral*.



Das x im Satz ist das x_0 in der Animation, und $x+h$ im Satz ist das wandernde x in der Animation. Der wandernde Punkt z in der Animation ist ein Punkt, wie er im Mittelwertsatz der Integralrechnung auftritt.

Die folgende Aussage heißt *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung*.

Satz 24.3. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Beweis. Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x)\right)$$

für $h \to 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $f(t)-f(x)$ betrachten, können wir annehmen, dass $f(x)=0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ die Abschätzung $|f(t)| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ nach Lemma 23.15 die Abschätzung

$$|\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt| \leq |\int_x^{x+h} \epsilon\,dt| = |h|\,\epsilon$$

und daher

$$|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \leq \epsilon.$$

□

24.3. **Stammfunktion.**

Zur Definition von Stammfunktionen setzen wir wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Wir werden uns aber weitgehend auf den reellen Fall beschränken.

Definition 24.4. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und sei

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Eine Funktion

$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf D differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in D$.

Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kann man zusammen mit Satz 23.14 als einen Existenzsatz für Stammfunktionen interpretieren.

Korollar 24.5. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Aufgrund von Satz 23.14 existiert das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

und aufgrund des Hauptsatzes ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f. □

Lemma 24.6. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

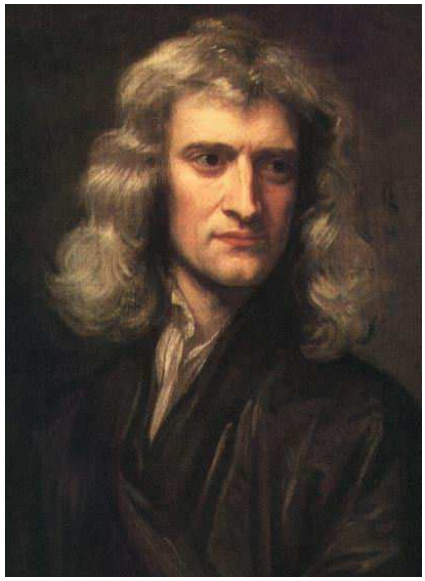
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.

Beweis. Es ist

$$(F-G)' \;=\; F' - G' \;=\; f - f \;=\; 0.$$

Daher ist nach Korollar 19.4 die Differenz $F - G$ konstant. □



Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Version des Hauptsatzes, der darin ausgedrückte Zusammenhang heißt auch *Newton-Leibniz-Formel*.

Korollar 24.7. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a < b$ aus I die Gleichheit

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 23.14 existiert das Integral. Mit der Integralfunktion $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) \;=\; G(b) - G(a).$$

Aufgrund von Satz 24.3 ist G differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Lemma 24.6 ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) - G(a) \;=\; F(b) - c - F(a) + c \;=\; F(b) - F(a).$$

□

Da eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, schreibt man manchmal

$$\int f(t)\,dt = F + c\,,$$

und nennt c eine *Integrationskonstante*. In gewissen Situationen, insbesondere im Zusammenhang mit *Differentialgleichungen*, wird diese Konstante durch zusätzliche Bedingungen festgelegt.

Notation 24.8. Es sei I ein reelles Intervall und $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f\colon I \to \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in I$. Dann setzt man

$$F|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Diese Notation wird hauptsächlich bei Rechnungen verwendet, vor allem beim Ermitteln von bestimmten Integralen.

Mit den schon früher bestimmten Ableitungen von differenzierbaren Funktionen erhält man sofort eine Liste von Stammfunktionen zu einigen wichtigen Funktionen. In der nächsten Vorlesung werden wir weitere Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen kennenlernen, die auf Ableitungsregeln beruhen. Im Allgemeinen ist das Auffinden von Stammfunktionen schwierig.

Die Stammfunktion zu x^a, wobei $x \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, ist, ist $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$.

Beispiel 24.9. Zwischen zwei (punktförmig gedachten) Massen M und m bestehe der Abstand R_0. Aufgrund der Gravitation besitzt dieses System eine gewisse Lageenergie. Wie ändert sich die Lageenergie, wenn die beiden Massen auf einen Abstand von $R_1 \geq R_0$ auseinander gezogen werden?

Die aufzubringende Energie ist Anziehungskraft mal Weg, wobei die Anziehungskraft allerdings selbst vom Abstand der Massen abhängt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft beim Abstand r gleich

$$F(r) = \gamma\frac{Mm}{r^2}\,,$$

wobei γ die Gravitationkonstante bezeichnet. Daher ist die Energie (oder Arbeit), die man aufbringen muss, um den Abstand von R_0 auf R_1 zu erhöhen, gleich

$$\begin{aligned} E &= \int_{R_0}^{R_1} \gamma\frac{Mm}{r^2}\,dr \\ &= \gamma Mm \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r^2}\,dr \\ &= \gamma Mm \left(-\frac{1}{r}|_{R_0}^{R_1}\right) \\ &= \gamma Mm \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right). \end{aligned}$$

Damit kann man der Differenz der Lageenergien zum Abstand R_0 bzw. R_1 einen sinnvollen Wert zuweisen, nicht aber den Lageenergien selbst.

Die Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{x}$ ist der natürliche Logarithmus.

Die Stammfunktion der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst.

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$, die Stammfunktion von $\cos x$ ist $\sin x$.

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan x$, es ist ja

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x)+\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1-x^2}$ auf $]-1,1[$ ist

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln 1+x - \ln 1-x),$$

es ist ja

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)}.\end{aligned}$$

Auf $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ist $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ eine Stammfunktion.

In der übernächsten Vorlesung werden wir ein Verfahren angeben, wie man zu einer beliebigen rationalen Funktion (also einem Quotienten aus zwei Polynomen) eine Stammfunktion finden kann.

Achtung! Integrationsregeln sind nur anwendbar auf Funktionen, die im gesamten Intervall definiert sind. Z.B. gilt *nicht*

$$\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{a}-\frac{1}{a} = -\frac{2}{a},$$

da hier über eine Definitionslücke hinweg integriert wird.

Beispiel 24.10. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ t\longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) := \begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t^2} \text{ für } t\neq 0.\end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da sie weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es existieren also weder untere noch obere Treppenfunktionen für f. Trotzdem besitzt f eine Stammfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{t^2}{2} \cos \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0 \,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Für $t \neq 0$ ergibt sich die Ableitung

$$H'(t) = t \cos \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t^2} \,.$$

Für $t = 0$ ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\frac{s^2}{2} \cos \frac{1}{s^2}}{s} = \frac{s}{2} \cos \frac{1}{s^2} \,.$$

Für $s \mapsto 0$ existiert der Grenzwert und ist gleich 0, so dass H überall differenzierbar ist (aber nicht stetig differenzierbar). Der erste Summand in H' ist stetig und besitzt daher nach Korollar 24.5 eine Stammfunktion G. Daher ist $H - G$ eine Stammfunktion von f. Dies ergibt sich für $t \neq 0$ aus der expliziten Ableitung und für $t = 0$ aus

$$H'(0) - G'(0) \;=\; 0 - 0 \;=\; 0.$$

24.4. **Stammfunktionen zu Potenzreihen.**

Wir erinnern daran, dass die Ableitung einer konvergenten Potenzreihe gliedweise gewonnen werden kann.

Lemma 24.11. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine in $U(0,r)$ konvergente Potenzreihe. Dann ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ebenfalls in $U(0,r)$ konvergent und stellt dort eine Stammfunktion für f dar.

Beweis. Sei $x \in U(0,r)$. Nach Voraussetzung und nach Lemma 16.7 ist dann auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

konvergent. Für jedes $n \geq |x|$ gelten die Abschätzungen

$$\left| \frac{a_{n-1}}{n} x^n \right| \;\leq\; \left| a_{n-1} x^{n-1} \right| \left| \frac{x}{n} \right| \;\leq\; \left| a_{n-1} x^{n-1} \right| .$$

Daher gilt für ein $k \geq |x|$ die Abschätzung

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} x^n \right| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \left| a_{n-1} x^{n-1} \right| .$$

Die rechte Reihe konvergiert nach Voraussetzung und ist daher eine konvergente Majorante für die linke Reihe. Daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{n} x^n \right|$ und nach Satz 9.9 auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. Die Stammfunktionseigenschaft folgt aus Satz 20.9. □

24. Arbeitsblatt

24.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 24.1. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\, dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \text{ falls } 0 \leq t \leq 2\,, \\ t^2 - 6t + 11, \text{ falls } 2 < t \leq 5\,, \\ 6, \text{ falls } 5 < t \leq 6\,, \\ -2t + 18\,, \text{ falls } 6 < t \leq 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 24.2.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Aufgabe 24.3. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2 + 3x - 6}{x - 1}\, dx\,.$$

Aufgabe 24.4.*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.5.*

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6,22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6,22] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 24.6.*

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[0,1]$.

Aufgabe 24.7. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt\,.$$

Aufgabe 24.8. Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 24.9. Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 24.10. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x)dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 24.11. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,.$$

Aufgabe 24.12. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 24.13. Seien

$$f, g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgabe 24.14. Es seien

$$f, g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a,b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(s)\int_a^b g(t)\,dt\,.$$

Aufgabe 24.15. Bestimme den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

Aufgabe 24.16.* Sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

24.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 24.17. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x + 1}\, dx\,.$$

Aufgabe 24.18. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}\,.$$

Aufgabe 24.19. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.20. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 24.21. (5 Punkte)

Betrachte die durch

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

gegebene Folge. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Verwende Eigenschaften der Wurzelfunktion.)

Aufgabe 24.22. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n+1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

(Ignoriere zuerst die beiden Bedingungen stetig und streng.)

25. Vorlesung - Integrationsregeln

Wir besprechen nun die wesentlichen Rechenregeln, mit denen man Stammfunktionen finden bzw. bestimmte Integrale berechnen kann. Sie beruhen auf Ableitungsregeln.

25.1. **Partielle Integration.**

Satz 25.1. *Es seien*

$$f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt\,.$$

Beweis. Aufgrund der Produktregel ist fg eine Stammfunktion von $fg'+f'g$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt \;=\; \int_a^b (fg'+f'g)(t)\,dt \;=\; fg|_a^b.$$

□

Bei der partiellen Integration sind insbesondere zwei Dinge zu beachten. Erstens liegt die zu integrierende Funktion im Allgemeinen nicht in der Form fg' vor, sondern einfach als Produkt uv (wenn kein Produkt vorliegt, so kommt man mit dieser Regel sowieso nicht weiter, wobei allerdings die triviale Produktzerlegung $1u$ manchmal helfen kann). Dann muss man einen Faktor integrieren und den anderen differenzieren. Wenn V eine Stammfunktion von v ist, so lautet die Formel

$$\int uv = uV - \int u'V\,.$$

Zweitens führt partielle Integration nur dann zum Ziel, wenn das Integral rechts, also $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$, integriert werden kann.

Beispiel 25.2. Wir bestimmen eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $\ln x$ mittels partieller Integration, wobei wir $\ln x = 1 \cdot \ln x$ schreiben und die konstante Funktion 1 integrieren und den Logarithmus ableiten. Damit ist

$$\int_a^b \ln x \, dx \;=\; (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx \;=\; (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b 1 \, dx \;=\; (x \cdot \ln x)|_a^b - x|_a^b.$$

Eine Stammfunktion ist also $x \cdot \ln x - x$.

Beispiel 25.3. Eine Stammfunktion der Sinusfunktion $\sin x$ ist $-\cos x$. Um Stammfunktionen zu $\sin^n x$ zu finden, verwenden wir partielle Integration, um eine rekursive Beziehung zu kleineren Potenzen zu erhalten. Um dies präzise zu machen, arbeiten wir mit Intervallgrenzen, und zwar sollen die Stammfunktionen von 0 ausgehen, also für 0 den Wert 0 besitzen. Für $n \geq 2$ ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin^n t \; dt &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \sin^2 t \; dt \\
&= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t) \, dt \\
&= \int_0^x \sin^{n-2} t \; dt - \int_0^x (\sin^{n-2} t \; \cos t) \cos t \; dt \\
&= \int_0^x \sin^{n-2} t \; dt - \frac{\sin^{n-1} t}{n-1} \cos t \,|_0^x - \frac{1}{n-1} \left(\int_0^x \sin^n t \; dt \right).
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $n-1$ und Umstellen erhält man

$$n \int_0^x \sin^n t \; dt \;=\; (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t \; dt - \sin^{n-1} x \; \cos x \, .$$

Speziell ergibt sich für $n = 2$

$$\int_0^x \sin^2 t \; dt = \frac{1}{2}(x - \sin x \; \cos x) \, .$$

Die folgende Darstellung von π heißt *Wallissches Produkt*.

John Wallis (1616-1703)

Korollar 25.4. *Es gilt die Darstellung*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{4k^2-1}\,.$$

Beweis. Wir setzen

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\, t\; dt\,.$$

Dies ist eine fallende Folge, für die aufgrund von Beispiel 25.3 die rekursive Beziehung

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$

und die Anfangsbedingungen $a_0 = \frac{\pi}{2}$ und $a_1 = 1$ gelten. Ausgeschrieben bedeutet dies für gerades n

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

und für ungerades n

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3}\,.$$

Mit $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$ schreibt sich dies als

$$a_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

bzw. als

$$a_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3}\,.$$

Da die Folge fallend ist und $\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$ gilt, konvergieren die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ gegen 1. Also ist insbesondere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{m\to\infty} \frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 5^2\cdot 3^2\cdot 1}{(2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2)^2}\cdot\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hier kann man den Zähler, indem man zwei aufeinander folgende Faktoren ausmultipliziert, als $\prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)$ und den Nenner als $\prod_{k=1}^{m} 4k^2$ schreiben. Daher ist

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{m} 4k^2}{\prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

□

25.2. **Integration der Umkehrfunktion.**

Satz 25.5. *Es sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktionvon f. Dann ist*

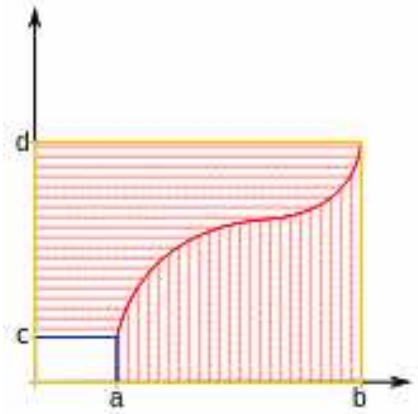
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Beweis. Ableiten unter Verwendung von Lemma 18.7 und Satz 18.9 ergibt

$$\begin{aligned}(yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))' &= f^{-1}(y) + y\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} - f(f^{-1}(y))\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

□



Funktionsgraph mit Umkehrfunktion und Flächen zur Berechnung eines Integrals der Umkehrfunktion.

Diese Aussage besitzt einen einfachen geometrischen Hintergrund. Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine streng wachsende stetige Funktion ist (und daher eine Bijektion zwischen $[a,b]$ und $[f(a),f(b)]$ induziert), so besteht zwischen den beteiligten Flächeninhalten der Zusammenhang

$$\int_a^b f(s)\,ds + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a)$$

bzw.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(s)\,ds\,.$$

Für die Stammfunktion G von f^{-1} mit dem Startpunkt $f(a)$ gilt daher, wenn F die Stammfunktion zu f bezeichnet, die Beziehung

$$G(y) = \int_{f(a)}^{y} f^{-1}(t)\,dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{f(a)}^{f(f^{-1}(y))} f^{-1}(t)\,dt \\ &= f^{-1}(y)f(f^{-1}(y)) - af(a) - \int_a^{f^{-1}(y)} f(s)\,ds \\ &= yf^{-1}(y) - af(a) - F(f^{-1}(y)) + F(a) \\ &= yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) - af(a) + F(a), \end{aligned}$$

wobei $-af(a) + F(a)$ eine Integrationskonstante ist.

Beispiel 25.6. Wir berechnen eine Stammfunktion von $\arctan x$ unter Verwendung von Satz 25.5. Eine Stammfunktion des Tangens ist

$$\int \tan t \; dt = -\ln(\cos x)\,.$$

Also ist

$$x \cdot \arctan x + \ln(\cos(\arctan x))$$

eine Stammfunktion von $\arctan x$.

25.3. **Die Substitutionsregel.**

Satz 25.7. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g\colon [a,b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds\,.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von g existieren beide Integrale. Es sei F eine Stammfunktion von f, die aufgrund von Korollar 24.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion $t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$ die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F\circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$$

□

Beispiel 25.8. Typische Beispiele, wo man sofort erkennen kann, dass man die Substitutionsregel anwenden kann, sind beispielsweise

$$\int g^n g'$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{n+1}g^{n+1}$$

oder

$$\int \frac{g'}{g}$$

mit der Stammfunktion

$$\ln\, g\,.$$

Häufig liegt ein bestimmtes Integral nicht in einer Form vor, dass man die vorstehende Regel direkt anwenden könnte. Häufiger kommt die folgende umgekehrte Variante zum Zug.

Korollar 25.9. *Es sei*

$$f\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei

$$\varphi\colon\, [c,d] \longrightarrow [a,b],\, s \longmapsto \varphi(s),$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\,ds$$

Beweis. Nach Satz 25.7 ist

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \;=\; \int_{\varphi(\varphi^{-1}(a))}^{\varphi(\varphi^{-1}(b))} f(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Bemerkung 25.10. Die Substitution wird folgendermaßen angewendet: Es soll das Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

berechnet werden. Man muss dann eine Idee haben, dass durch die Substitution

$$t = \varphi(s)$$

das Integral einfacher wird (und zwar unter Berücksichtigung der Ableitung $\varphi'(t)$ und unter der Bedingung, dass die Umkehrfunktion φ^{-1} berechenbar ist). Mit $c = \varphi^{-1}(a)$ und $d = \varphi^{-1}(b)$ liegt insgesamt die Situation

$$[c,d] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

vor. In vielen Fällen kommt man mit gewissen Standardsubstitutionen weiter.

Bei einer Substitution werden drei Operationen durchgeführt.

(1) Ersetze $f(t)$ durch $f(\varphi(s))$.
(2) Ersetze dt durch $\varphi'(s)ds$.
(3) Ersetze die Integrationsgrenzen a und b durch $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$.

Für den zweiten Schritt empfiehlt sich die Merkregel

$$dt \;=\; d\varphi(s) \;=\; \varphi'(s)ds,$$

der man im Rahmen der Theorie der „Differentialformen“ auch eine inhaltliche Bedeutung geben kann.

Beispiel 25.11. Die obere Kreislinie des Einheitskreises ist die Punktmenge

$$\left\{(x,y)|\, x^2+y^2=1,\; -1\le x\le 1,\; y\ge 0\right\}\;.$$

Zu gegebenem x, $-1\le x\le 1$, gibt es genau ein y, das diese Bedingung erfüllt, nämlich $y=\sqrt{1-x^2}$. Daher ist der Flächeninhalt des oberen Einheitskreises gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ über dem Intervall $[-1,1]$, also gleich

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Mit der Substitution

$$x=\,\cos\,t\;\text{ bzw. }\;t=\arccos\,x$$

(wobei $\cos\,:[0,\pi]\to[-1,1]$ bijektiv ist), erhält man

$$\begin{aligned}\int_a^b\sqrt{1-x^2}\,dx\;&=\;\int_{\arccos\,a}^{\arccos\,b}\sqrt{1-\,\cos^2\,t}\,(-\,\sin\,t\,)\,dt\\&=\;-\int_{\arccos\,a}^{\arccos\,b}\sin^2\,t\;dt\\&=\;\frac{1}{2}(\,\sin\,t\;\cos\,t\;-t)|_{\arccos\,a}^{\arccos\,b}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{2}(x\cdot\sin\,(\arccos\,x\,)-\arccos\,x\,)\;=\;\frac{1}{2}(x\cdot\sqrt{1-x^2}-\arccos\,x\,)$$

eine Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$. Daher ist

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\;=\;\frac{1}{2}(\,\sin\,0\;+\;\sin\,\pi\;+\pi)\;=\;\pi/2.$$

Beispiel 25.12. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $\sqrt{x^2-1}$ unter Verwendung der Hyperbelfunktionen $\sinh\,t$ und $\cosh\,t$, für die die Beziehung $\cosh^2\,t\;-\;\sinh^2\,t\;=1$ gilt. Die Substitution

$$x=\,\cosh\,t\;\text{ mit }\;dx=\,\sinh\,t\,dt$$

liefert

$$\int_a^b\sqrt{x^2-1}\,dx\;=\;\int_{\operatorname{arcosh}\,a}^{\operatorname{arcosh}\,b}\sqrt{\cosh^2\,t\;-1}\cdot\,\sinh\,t\;dt\;=\;\int_{\operatorname{arcosh}\,a}^{\operatorname{arcosh}\,b}\sinh^2\,t\;dt.$$

Eine Stammfunktion des Sinus hyperbolicus im Quadrat ergibt sich aus

$$\sinh^2\,t\;=\;\left(\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\right)^2\;=\;\frac{1}{4}(e^{2t}+e^{-2t}-2).$$

Daher ist

$$\int \sinh^2 u \, du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} - 2u\right) = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{1}{2}u$$

und somit

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{4}\sinh\left(2 \operatorname{arcosh} x\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x\,.$$

Beispiel 25.13. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

bestimmen. Als Vorüberlegung berechnen wir die Ableitung von

$$\frac{1}{x\cos x - \sin x}\,.$$

Diese ist

$$-\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^2}\,.$$

Wir schreiben daher f als ein Produkt

$$f(x) = \frac{x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^2}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

und wenden darauf partielle Integration an, wobei wir den ersten Faktor integrieren und den zweiten Faktor ableiten. Die Ableitung des zweiten Faktors ist

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{x\cos x - \sin x}\cdot\frac{x}{\sin x} \\ &\quad - \int \frac{1}{x\cos x - \sin x}\cdot\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \frac{1}{x\cos x - \sin x}\cdot\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \frac{1}{x\cos x - \sin x}\cdot\frac{x}{\sin x} - \cot x\,.\end{aligned}$$

25. Arbeitsblatt

25.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 25.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\, dx\,.$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

Aufgabe 25.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x \ .$$

Aufgabe 25.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x \, .$$

Aufgabe 25.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} \, .$$

Aufgabe 25.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}} \, .$$

Aufgabe 25.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, .$$

Aufgabe 25.7. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x \, - x^2 \cdot \sin x \ .$$

Aufgabe 25.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x \ .$$

Aufgabe 25.9. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1+3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}} \, .$$

Aufgabe 25.10. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1+\sin x)) \cdot \sin x \ .$$

Aufgabe 25.11. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(bt + c) \cdot f(t)$$

Aufgabe 25.12. Es sei

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion, indem man für das Integral

$$\int_a^b f^{-1}(y)dy$$

die Substitution $y = f(x)$ durchführt und anschließend partiell integriert.

Aufgabe 25.13. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 25.5.

Aufgabe 25.14. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgabe 25.15.*

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}} dx\,.$$

Aufgabe 25.16.*

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

25.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 25.17. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x)\ .$$

Aufgabe 25.18. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\ .$$

Aufgabe 25.19. (4 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(at^2+bt+c)\cdot f(t)$$

Aufgabe 25.20. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon\ [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

eine streng wachsende, bijektive Funktion und

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion.

a) Zeige, dass $f \circ \varphi$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

b) Sei nun φ zusätzlich differenzierbar. Bestätige die Gleichung

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds$$

direkt, ohne Bezug auf die Substitutionsregel.

Aufgabe 25.21. (5 Punkte)

Sei

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Betrachte die Funktion

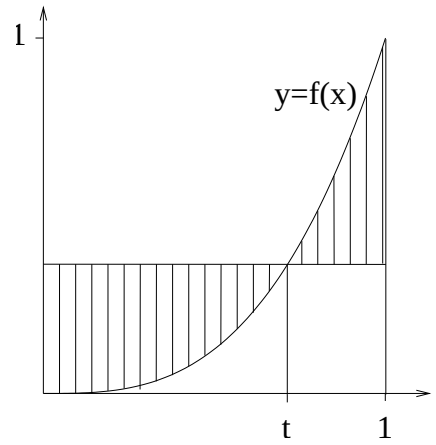
$$f(x) = \int_0^x \sin(t) g(x-t) dt,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Zeige, dass f eine zweite Ableitung besitzt, und dass die folgende Beziehung gilt:

$$f'' + f = g\,.$$

(Mit einer geeigneten Substitution kann man erreichen, dass die Variable x nicht mehr als Argument der Funktion g auftritt. Danach geht es darum, geeignete trigonometrische Formeln anzuwenden.)

Aufgabe 25.22. (5 Punkte)



Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Für welche Punkte $t \in [0,1]$ besitzt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ein lokales Extremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum?

26. Vorlesung -Partialbruchzerlegung

Wir erinnern an den Begriff einer rationalen Funktion:

Zu zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei D das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion*.

Wir möchten zeigen, wie man zu solchen rationalen Funktionen eine Stammfunktion finden kann. In vielen Fällen wissen wir das bereits. Wenn $Q = 1$ ist, so handelt es sich um ein Polynom P, das problemlos zu integrieren ist.

Für die Funktion $1/x$ ist der natürliche Logarithmus $\ln |x|$ eine Stammfunktion.[20] Damit ist auch eine Funktion vom Typ

$$\frac{1}{ax+b}$$

(mit $a \neq 0$) integrierbar, eine Stammfunktion ist $\frac{1}{a} \ln |ax+b|$. Damit kann man überhaupt beliebige rationale Funktionen der Form

$$\frac{P(x)}{ax+b}$$

integrieren. Die Division mit Rest[21] führt zu einer Darstellung

$$P = H(ax+b) + c\,,$$

mit einem weiteren Polynom H und wobei das Restpolynom c konstant ist, da sein Grad kleiner als der Grad des linearen Polynoms ist, durch das die Division durchgeführt wird. Aus dieser Gleichung erhält man die Darstellung

$$\frac{P(x)}{ax+b} = H + \frac{c}{ax+b}\,,$$

wobei wir für die beiden Summanden Stammfunktionen angeben können. Die Division mit Rest wird auch im allgemeinen Fall entscheidend sein. Davor betrachten wir aber noch den Fall eines quadratischen Nennerpolynoms mit Zähler 1, also

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Durch Multiplikation mit a (bzw. Division des Nenners durch a) kann man den Koeffizienten vor x^2 zu 1 normieren. Durch quadratisches Ergänzen kann man

$$x^2 + bx + c \;=\; (x+d)^2 + e$$

schreiben. Mit der neuen Variablen $u = x + d$ (bzw. mit der Substitution $u = x + d$) schreibt sich dies als $u^2 + e$. Mit einer weiteren Substitution unter Verwendung der Quadratwurzel von e bzw. von $-e$ gelangt man zu

$$\frac{1}{1+v^2} \text{ oder } \frac{1}{1-v^2}\,.$$

[20] Die Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs, um die Aussagen über Stammfunktionen auch in dieser Hinsicht präzise zu machen, überlassen wir dem Leser.

[21] Man kann die Division mit Rest durch ein lineares Polynom $ax+b$ sukzessive fortsetzen und erhält ein Polynom in der „neuen Variablen“ $u = ax + b$. Dies geht nicht mit einem Polynom von höherem Grad.

Im ersten Fall gilt

$$\int \frac{1}{1+v^2} dv \;=\; \arctan\, v$$

und im zweiten Fall gilt

$$\int \frac{1}{1-v^2} dv \;=\; \frac{1}{2}\,\ln\,\frac{1+v}{1-v} \;=\; \frac{1}{2}\,(\,\ln\,(1+v) - \,\ln\,(1-v))\,,$$

wie in der 24. Vorlesung gezeigt wurde. Für die inversen Funktionen zu Potenzen von reellen quadratischen nullstellenfreien Polynomen werden die Stammfunktionen durch folgende Rekursionsformel bestimmt.

Lemma 26.1. *Es sei x^2+bx+c (mit $b,c \in \mathbb{R}$) ein quadratisches Polynom ohne reelle Nullstelle (d.h., dass $\triangle := \frac{b^2-4c}{4} < 0$ ist). Dann ist*[22]

$$\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\,\arctan\,\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\left(x+\frac{b}{2}\right)$$

eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{x^2+bx+c}$$

und für $n \geq 1$ gilt die Rekursionsformel

$$\int_r^s \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n+1}}dx \;=\; \frac{1}{n(4c-b^2)}\left(\frac{2z+b}{(z^2+bz+c)^n}|_r^s + (4n-2)\int_r^s \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx\right).$$

Beweis. Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\,\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\left(x+\frac{b}{2}\right)\right)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{-\triangle}\left(x+\frac{b}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{-\triangle+\left(x+\frac{b}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{c-\frac{b^2}{4}+x^2+bx+\frac{b^2}{4}} \\
&= \frac{1}{x^2+bx+c}.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Rekursionsformel setzen wir $q(x) := x^2+bx+c$ und leiten ab.

$$((2x+b)q^{-n})' \;=\; 2q^{-n} - n(2x+b)q^{-n-1}(2x+b)$$

[22]Manchmal wird eine Stammfunktion zu einer Funktion mit einer neuen Variablen angegeben, um die Rollen von Integrationsvariablen und Variable für die Integrationsgrenzen auseinander zu halten. In einem unbestimmten Integral, wo keine Integrationsgrenzen aufgeführt werden, ist das nicht wichtig. Bei einem Integral der Form $\int_0^z f(x)dx$ ist x die Integrationsvariable und z die Grenzvariable. Der Ausdruck hängt aber nicht von x ab, sondern lediglich von z. Deshalb ist $\int_0^z f(x)dx = F(z)$ (auf beiden Seiten steht eine von z abhängige Funktion, und diese stimmen überein) richtig und $\int_0^z f(x)dx = F(x)$ falsch. Eine Formulierung wie $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$ ist aber korrekt..

$$\begin{aligned} &= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(2x+b)^2 \\ &= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(4x^2+4xb+b^2) \\ &= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(4q-4c+b^2) \\ &= 2q^{-n} - 4nq^{-n} + n(4c-b^2)q^{-n-1} \\ &= (2-4n)q^{-n} + n(4c-b^2)q^{-n-1}. \end{aligned}$$

Division durch $n(4c-b^2)$ und Umstellen ergibt

$$q^{-n-1} = \frac{1}{n(4c-b^2)}((2x+b)q^{-n})' + \frac{4n-2}{n(4c-b^2)}q^{-n}.$$

Dies ist die Behauptung. □

Bemerkung 26.2. Mit Lemma 26.1 kann man auch rationale Funktionen der Form

$$\frac{rx+s}{(x^2+bx+c)^n}$$

(mit $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$,) integrieren, wo also das Zählerpolynom linear ist und das Nennerpolynom eine Potenz eines quadratischen Polynoms ist. Bei $n = 1$ ist

$$\left(\frac{r}{2}\ln(x^2+bx+c)\right)' = \frac{r}{2}\cdot\frac{2x+b}{x^2+bx+c} = \frac{rx+\frac{rb}{2}}{x^2+bx+c}.$$

D.h., dass die Differenz zwischen dieser Ableitung und der zu integrierenden Funktion vom Typ

$$\frac{u}{x^2+bx+c}$$

ist, was wir aufgrund von Lemma 26.1 integrieren können. Bei $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-r}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\right)' \\ = &\frac{-r}{2(n-1)}\cdot(-n+1)\cdot(2x+b)\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^n} \\ = &\frac{rx+\frac{rb}{2}}{(x^2+bx+c)^n} \end{aligned}$$

und wieder ist das Integral auf eine schon behandelte Situation zurückgeführt.

Wir möchten für beliebige rationale Funktionen $f = \frac{P}{Q}$ mit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Stammfunktionen bestimmen. Dies geht grundsätzlich immer, vorausgesetzt, dass man eine Faktorzerlegung des Nennerpolynoms besitzt. Aufgrund der reellen Version des Fundamentalsatzes der Algebra, den wir in Analysis II beweisen werden,[23] gibt es eine Faktorzerlegung

$$Q = (X-b_1)\cdots(X-b_r)\cdot q_1\cdots q_s\,,$$

[23]Wenn man auf diese spätere Aussage nicht vorgreifen möchte, so kann man sich im Folgenden auf die Situation beschränken, wo eine Zerlegung des Nennerpolynoms explizit gegeben ist.

wobei die q_j quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen sind. Das Bestimmen der Stammfunktionen zu rationalen Funktionen beruht auf der *Partialbruchzerlegung* von rationalen Funktionen, die wir zuerst besprechen.

26.1. **Partialbruchzerlegung.**

Die *Partialbruchzerlegung* liefert eine wichtige Darstellungsform für eine rationale Funktion P/Q, bei der die Nenner besonders einfach werden. Wir beginnen mit dem Fall $K = \mathbb{C}$, wo wir den Fundamentalsatz der Algebra zur Verfügung haben.

Satz 26.3. *Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s}$$

mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{C}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, mit

$$\frac{P}{Q} = H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} + \\ \cdots + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \cdots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}}.$$

Beweis. Die Division mit Rest liefert eine eindeutige Darstellung

$$\frac{P}{Q} = H + \frac{\tilde{P}}{Q}$$

mit $\operatorname{grad}(\tilde{P}) < \operatorname{grad}(Q)$. Wir müssen daher die Aussage nur für Quotienten aus Polynomen zeigen, wo der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist.Wir führen Induktion über den Grad $r = \sum_{i=1}^{s} r_i$ des Nennerpolynoms. Bei $r = 0, 1$ ist nichts zu zeigen, bzw. der Quotient steht bereits in der gewünschten Form. Es sei nun Q ein Nennerpolynom vom Grad r und die Aussage sei für kleineren Grad bereits bewiesen. Es sei $X - a_1$ ein Linearfaktor von Q, so dass wir

$$Q = \tilde{Q}(X - a_1)$$

schreiben können, wobei $\tilde{Q}$ den Grad $r - 1$ besitzt. Die Ordnung von $X - a_1$ in Q sei r_1. Wir setzen

$$\frac{P}{Q} = \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} + \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$$

an. Dies führt auf

$$P = c_{1r_1}(X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_s)^{r_s} + \tilde{P}(X - a_1),$$

aus der wir c_{1r_1} und $\tilde{P}$ bestimmen wollen. Da die Gleichheit insbesondere für $X = a_1$ gelten soll, muss

$$c_{1r_1} = \frac{P(a_1)}{(a_1 - a_2)^{r_2} \cdots (a_1 - a_s)^{r_s}}$$

sein, wobei diese Division erlaubt ist, da die a_i als verschieden vorausgesetzt wurden. Wir betrachten nun

$$P - c_{1r_1}(X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_s)^{r_s}$$

mit dem soeben bestimmten Wert c_{1r_1}. Für diese Differenz ist dann a_1 nach Konstruktion eine Nullstelle, so dass man nach Lemma 11.6 durch $X - a_1$ teilen kann, also

$$P - c_{1r_1}(X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_s)^{r_s} = (X - a_1)\tilde{P}$$

erhält. Dadurch ist $\tilde{P}$ eindeutig festgelegt. Der Grad von $\tilde{P}$ ist kleiner als der Grad von P und der Grad von $\tilde{P}$ ist kleiner als der Grad von $\tilde{Q}$. Daher können wir auf $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ die Induktionsvoraussetzung anwenden. □

Wir wenden uns nun der reellen Situation zu.

Satz 26.4. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s} Q_1^{t_1} \cdots Q_u^{t_u}$$

mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{R}$ und verschiedenen quadratischen Polynomen Q_k ohne reelle Nullstellen. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{R}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, und eindeutig bestimmte lineare Polynome $L_{k\ell} = d_{k\ell}X + e_{k\ell}$, $1 \leq k \leq u$, $1 \leq \ell \leq t_k$, mit

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q} &= H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} \\ &\quad + \cdots + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \cdots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}} \\ &\quad + \frac{L_{11}}{Q_1} + \frac{L_{12}}{Q_1^2} + \cdots + \frac{L_{1t_1}}{Q_1^{t_1}} \\ &\quad + \cdots + \frac{L_{u1}}{Q_u} + \frac{L_{u2}}{Q_u^2} + \cdots + \frac{L_{ut_u}}{Q_u^{t_u}}.\end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen von der komplexen Partialbruchzerlegung von P/Q aus. Die reell quadratischen Polynome Q_k zerfallen komplex als

$$Q_k = (X - z)(X - \overline{z})$$

mit $z = z_k \in \mathbb{C}$. In der komplexen Partialbruchzerlegung betrachten wir die Teilsumme

$$\frac{c}{(X - z)^\ell} + \frac{d}{(X - \overline{z})^\ell}$$

mit $c, d \in \mathbb{C}$. Wenn man auf die gesamte komplexe Partialbruchzerlegung die komplexe Konjugation anwendet, so bleibt der reelle Quotient $\frac{P}{Q}$ unverändert, so dass auch die Partialbruchzerlegung in sich überführt wird. Daher müssen c und d zueinander konjugiert sein und die obige Teilsumme ist daher

$$\frac{c}{(X-z)^\ell} + \frac{\overline{c}}{(X-\overline{z})^\ell} = \frac{c(X-\overline{z})^\ell + \overline{c}(X-z)^\ell}{(X-z)^\ell(X-\overline{z})^\ell} = \frac{S}{Q_k^\ell},$$

wobei das Zählerpolynom S reell ist, da es invariant unter der komplexen Konjugation ist. Dieses Zählerpolynom ist im Allgemeinen nicht linear, wir werden aber zeigen, dass man weiter auf lineare Zählerpolynome reduzieren kann. Der Grad von S ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Durch sukzessive Division mit Rest von S durch Q_k erhält man

$$S = L_0 + L_1 Q_k + L_2 Q_k^2 + \cdots + L_{\ell-1} Q_k^{\ell-1}$$

mit linearen (reellen) Polynomen L_i. Daher ist

$$\frac{S}{Q_k^\ell} = \frac{L_0 + L_1 Q_k + L_2 Q_k^2 + \cdots + L_{\ell-1} Q_k^{\ell-1}}{Q_k^\ell} = \frac{L_0}{Q_k^\ell} + \frac{L_1}{Q_k^{\ell-1}} + \cdots + \frac{L_{\ell-2}}{Q_k^2} + \frac{L_{\ell-1}}{Q_k}.$$

Wenn man alles aufsummiert, so erhält man insgesamt die Behauptung. □

Neben dem Umweg über die komplexe Partialbruchzerlegung gibt es weitere Methoden, in Beispielen die reelle Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Grundsätzlich bedeutet das Bestimmen der (reellen oder komplexen) Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung, ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem zu lösen, wobei man sowohl durch Koeffizientenvergleich als auch durch das Einsetzen von bestimmten Zahlen zu hinreichend vielen linearen Gleichungen kommt.

Beispiel 26.5. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)},$$

wobei der Faktor rechts reell nicht weiter zerlegbar ist. Daher muss es eine eindeutige Darstellung

$$\frac{1}{(X^3-1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

geben. Multiplikation mit dem Nennerpolynom führt auf

$$\begin{aligned} 1 &= a(X^2+X+1) + (bX+c)(X-1) \\ &= (a+b)X^2 + (a+c-b)X + a - c. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a+b=0 \text{ und } a+c-b=0 \text{ und } a-c=1$$

mit den eindeutigen Lösungen

$$a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{3},\ c = -\frac{2}{3}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{1}{(X^3-1)} = \frac{\frac{1}{3}}{X-1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}}{X^2+X+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{X-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{X+2}{X^2+X+1}.$$

Beispiel 26.6. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{X^3-X+5}{X^4+X^2} = \frac{X^3-X+5}{X^2(X^2+1)},$$

wo die Faktorzerlegung des Nennerpolynoms sofort ersichtlich ist. Der Ansatz

$$\frac{X^3-X+5}{X^2(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

führt durch Multiplikation mit dem Nennerpolynom auf

$$\begin{aligned} X^3-X+5 &= aX(X^2+1) + b(X^2+1) + (cX+d)X^2 \\ &= aX^3 + aX + bX^2 + b + cX^3 + dX^2 \\ &= (a+c)X^3 + (b+d)X^2 + aX + b. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a+c=1 \text{ und } b+d=0 \text{ und } a=-1 \text{ und } b=5$$

mit der Lösung

$$b=5,\ a=-1,\ d=-5,\ c=2\,.$$

Insgesamt ist die Partialbruchzerlegung also gleich

$$\frac{X^3-X+5}{X^2(X^2+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{5}{X^2} + \frac{2X-5}{X^2+1}\,.$$

26.2. **Integration rationaler Funktionen.**

Verfahren 26.7. Es sei eine rationale Funktion

$$f = \frac{P}{Q}$$

gegeben, für die eine Stammfunktion gefunden werden soll. Dabei seien P und Q reelle Polynome. Man geht folgendermaßen vor.

(1) Bestimme die reelle Faktorzerlegung des Nennerpolynoms Q.
(2) Finde die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P}{Q} = H + \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s_i}\frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j}\right) + \sum_{k=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{t_k}\frac{d_{k\ell}X+e_{k\ell}}{Q_k^\ell}\right).$$

(3) Bestimme für H, für jedes

$$\frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j}$$

und für jedes

$$\frac{d_{k\ell}X+e_{k\ell}}{Q_k^\ell}$$

eine Stammfunktion.

Beispiel 26.8. Wir möchten eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$$

bestimmen. Nach Beispiel 26.5 ist die reelle Partialbruchzerlegung gleich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+4}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}.
\end{aligned}$$

Als Stammfunktion ergibt sich daher

$$\frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \cdot \ln (x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right),$$

wobei wir für den rechten Summanden Lemma 26.1 verwendet haben.

Beispiel 26.9. Wir möchten eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 5}{x^4 + x^2}$$

bestimmen. Nach Beispiel 26.7 ist die reelle Partialbruchzerlegung gleich

$$\frac{x^3 - x + 5}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2x-5}{x^2+1}.$$

Als Stammfunktion ergibt sich daher

$$-\ln |x| - 5x^{-1} + \ln (x^2+1) - 5 \arctan x.$$

26. Arbeitsblatt

26.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 26.1. Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3X^5 + 4X^4 - 2X^2 + 5X - 6}{X^3}.$$

Aufgabe 26.2. Bestimme die Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung in Beispiel 26.6 durch Einsetzen von einigen Zahlen für X.

Aufgabe 26.3. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^2(X^2+1)}\,.$$

Aufgabe 26.4. Bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^3-1}\,.$$

Aufgabe 26.5. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^3(X-1)^3}\,.$$

Aufgabe 26.6. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^3+4X^2+7}{X^2-X-2}\,.$$

Aufgabe 26.7. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)(X-3)}\,.$$

Aufgabe 26.8.*

Es sei

$$f(x)=\frac{x^3+7x^2-5x+4}{x^2-3}\,.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$.

Aufgabe 26.9.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R},\, x\longmapsto \frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x>1$.

Aufgabe 26.10.*

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3+4x-3}{x^2+1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 26.11.*

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}$$

für $x > 2$.

Aufgabe 26.12. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x^2+5}\,.$$

Aufgabe 26.13. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x^2-5}\,.$$

Aufgabe 26.14. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{2x^2+x-1}\,.$$

Aufgabe 26.15. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{1+x^4}\,.$$

Aufgabe 26.16. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{7x^6-18x^5+8x^3-9x^2+2}{x^7-3x^6+2x^4-3x^3+2x-5}\,.$$

26.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 26.17. (4 Punkte)

Schreibe die rationale Funktion

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{4x + 3}$$

in der neuen Variablen $u = 4x + 3$. Berechne die Stammfunktion über die reelle Partialbruchzerlegung und über die Substitution $u = 4x + 3$.

Aufgabe 26.18. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^4 - 1}.$$

Aufgabe 26.19. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^7 + X^4 - 5X + 3}{X^8 + X^6 - X^4 - X^2}.$$

Aufgabe 26.20. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{3x - 5}{(x^2 + 2x + 7)^2}.$$

27. Vorlesung - Weitere Stammfunktionen

27.1. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in der Exponentialfunktion.**

Nachdem wir nun rationale Funktionen integrieren können, können wir auch für eine ganze Reihe von Funktionen eine Stammfunktion finden, die wir durch gewisse Standardsubstitutionen auf eine rationale Funktion zurückführen können.

Lemma 27.1. *Es sei f eine rationale Funktion in der Exponentialfunktion, d.h. es gebe Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(e^t)}{Q(e^t)}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$t = \ln s$$

das Integral $\int f(t)\,dt$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen.

Beweis. Bei der Substitution $t = \ln s$ ist

$$dt = \frac{1}{s} ds\,,$$

und für die Polynome $P(e^t)$ und $Q(e^t)$ ergeben sich

$$P\left(e^t\right) = P\left(e^{\ln s}\right) = P(s) \text{ und } Q\left(e^t\right) = Q\left(e^{\ln s}\right) = Q(s)\,.$$

Insgesamt ergibt sich also die rationale Funktion $\frac{P(s)}{sQ(s)}$. In deren Stammfunktion muss man dann $s = e^t$ einsetzen. □

Im vorstehenden Lemma geht es um die zusammengesetzten Funktionen vom Typ

$$U \xrightarrow{\exp} \mathbb{R} \xrightarrow{\frac{P}{Q}} \mathbb{R}\,,$$

wobei der Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$U = \{z \in \mathbb{R} |\, Q(e^z) \neq 0\}$$

festgelegt ist.

Beispiel 27.2. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{e^t + e^{3t}}$$

finden. Das in Lemma 27.1 beschriebene Verfahren führt auf die rationale Funktion

$$\frac{1}{(s+s^3)s} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

so dass die Partialbruchzerlegung direkt vorliegt. Die Stammfunktion von dieser rationalen Funktion ist

$$-\frac{1}{s} - \arctan s\,.$$

Die Stammfunktion von f ist daher

$$-\frac{1}{e^t} - \arctan e^t\,.$$

Neben dem Polynomring $K[X]$ in einer Variablen über einem Körper K gibt es auch Polynomringe in mehreren Variablen, wobei wir im Folgenden nur den Polynomring in zwei Variablen benötigen. Man schreibt ihn als $K[X,Y]$ und definiert ihn am einfachsten als

$$(K[X])[Y]\,,$$

wobei der Grundring $K[X]$ allerdings kein Körper ist. Jedenfalls besteht dieser Ring aus allen Polynomen in zwei Variablen, also aus Ausdrücken der Form

$$a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + a_{03}Y^3 + \dots .$$

Entsprechend gibt es auch rationale Funktionen in zwei Variablen. Diese sind wiederum Quotienten aus zwei Polynomen in zwei Variablen. Wenn man in eine solche Funktion in zwei Variablen zwei Funktionen in einer Variablen einsetzt, so erhält man wieder eine Funktion in einer Variablen. Dies ist der Fall in den folgenden Situationen.

Korollar 27.3. *Es sei eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen* sinh *und* cosh *gegeben, d.h. es gebe zwei Polynome P und Q in zwei Variablen mit $Q \neq 0$ derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(\sinh t\,,\, \cosh t\,)}{Q(\sinh t\,,\, \cosh t\,)}$$

gilt. Dann lässt sich das Integral

$$\int f(t)\,dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion in der Exponentialfunktion zurückführen und damit lösen.

Beweis. Mit

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ und } \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

erhält man eine rationale Funktion in e^t und $e^{-t} = (e^t)^{-1}$, so dass insgesamt eine rationale Funktion in der Eponentialfunktion vorliegt. Deren Stammfunktion lässt sich wie in Lemma 27.1 beschrieben finden. □

27.2. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in trigonometrischen Funktionen.**

Lemma 27.4. *Es sei eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen* $\sin t$ *und* $\cos t$ *gegeben, d.h. es gebe zwei Polynome P und Q in zwei Variablen mit $Q \neq 0$ derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(\sin t\,,\, \cos t\,)}{Q(\sin t\,,\, \cos t\,)}$$

gilt. Dann führt die Substitution

$$t = 2 \arctan s$$

das Integral

$$\int f(t)\,dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion zurück.

Beweis. Bei der Substitution $t = 2 \arctan s$ ist $s = \tan \frac{t}{2}$ und $dt = \frac{2}{1+s^2} ds$. Aus den trigonometrischen Funktionen wird unter Verwendung von Satz 15.10

$$\begin{aligned}
\sin t &= \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= 2s \frac{1}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos t &= \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \\
&= 2 \frac{1}{1+s^2} - 1 \\
&= \frac{1-s^2}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

Da sowohl das Differential dt als auch die trigonometrischen Funktionen bei dieser Substitution rationale Ausdrücke in s sind, liegt nach dieser Substitution insgesamt eine rationale Funktion vor. □

Beispiel 27.5. Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sin t}$$

berechnet sich unter Verwendung von Lemma 27.4 folgendermaßen.

$$\int \frac{1}{\sin t}\, dt = \int \frac{1+s^2}{2s} \cdot \frac{2}{1+s^2}\, ds = \int \frac{1}{s}\, ds.$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{\sin t}$ ist daher $\ln\left(\tan \frac{t}{2}\right)$.

27.3. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in Wurzelfunktionen.**

Lemma 27.6. *Es sei f eine rationale Funktion in x und in $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}$ (mit $a,b,r,s \in \mathbb{R}$, $a,rx+s \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$), d.h. es gebe Polynome in zwei Variablen, $P,Q \in \mathbb{R}[x,y]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(x) = \frac{P\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}\right)}{Q\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}\right)}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$x = \frac{su^n - b}{a - ru^n}$$

die Berechnung von $\int f(x)dx$ auf das Integral einer rationalen Funktion in u zurückführen.

Beweis. Wir können $sa - rb \neq 0$ annehmen, da sonst Zähler und Nenner im Wurzelausdruck linear abhängig sind und man teilen könnte. Bei der angegebenen Substitution ist

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}} &= \sqrt[n]{\frac{a\frac{su^n-b}{a-ru^n}+b}{r\frac{su^n-b}{a-ru^n}+s}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{a(su^n-b)+b(a-ru^n)}{r(su^n-b)+s(a-ru^n)}} \\
&= \sqrt[n]{\frac{asu^n-bru^n}{-rb+sa}} \\
&= u.
\end{aligned}$$

Da die Ableitung der rationalen Funktion $x = \frac{su^n-b}{a-ru^n}$ nach u wieder eine rationale Funktion in u ist, ist das Gesamtergebnis nach dieser Substitution eine rationale Funktion in u. □

Lemma 27.7. *Es sei f eine rationale Funktion in x und in $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und so, dass ax^2+bx+c auch positive Werte annimmt), schreiben kann, d.h. es gebe Polynome in zwei Variablen, $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(x) = \frac{P\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{Q\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)}$$

gilt. Dann kann man durch eine Substitution der Form

$$x = \alpha t + \beta$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$), die Berechnung von $\int f(x)dx$ auf ein Integral der Form

(1) $\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt$,

(2) $\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt$,
(3) $\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) dt$,

zurückführen, wobei R wieder eine rationale Funktion in zwei Variablen ist. In diesen drei Fällen führen die Substitutionen

(1) $t = \sin s$,
(2) $t = \cosh s$,
(3) $t = \sinh s$,

auf das Integral über eine rationale Funktion in trigonometrischen Funktionen bzw. in Hyperbelfunktionen

Beweis. Durch eine Substitution der Form $u = \sqrt{a}x$ bzw. $u = \sqrt{-a}x$ vereinfacht sich die Quadratwurzel zu $\sqrt{u^2 + \tilde{b}u + \tilde{c}}$ bzw. zu $\sqrt{-u^2 + \tilde{b}u + \tilde{c}}$. Quadratisches Ergänzen führt zu $\sqrt{v^2 + \tilde{e}}$ bzw. $\sqrt{-v^2 + \tilde{e}}$. Durch eine weitere Substitution der Form $w = \frac{v}{\sqrt{|\tilde{e}|}}$ erhält man $\sqrt{\tilde{e}}\sqrt{w^2+1}$ oder $\sqrt{-\tilde{e}}\sqrt{w^2-1}$ oder aber[24] $\sqrt{\tilde{e}}\sqrt{-w^2+1}$. Dies sind alles affin-lineare Substitutionen. Die Ergebnisse unter der Gesamtsubstitution sind von der angegebenen Art. Wenn es sich um ein Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$$

handelt, so führt $t = \sin s$ zu

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 s} = \sqrt{\cos^2 s} = \cos s$$

und zu

$$dt = (\sin s)' ds = \cos s \, ds,$$

so dass sich eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen $\sin s$ und $\cos s$ ergibt. Bei einem Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)$$

führt $t = \cosh s$ (unter Verwendung von $\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1$, siehe Aufgabe 20.20) zu

$$\sqrt{t^2-1} = \sinh s$$

und zu

$$dt = (\cosh s)' ds = \sinh s \, ds,$$

so dass sich eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen $\sinh s$ und $\cosh s$ ergibt.

Bei einem Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)$$

[24] Der Fall $\sqrt{-w^2-1}$ ist nicht möglich, da dann die ursprüngliche Funktion für keine reelle Zahl definiert wäre.

führt $t = \sinh s$ zu

$$\sqrt{t^2+1} = \cosh s$$

und zu

$$dt = (\sinh s)' ds = \cosh s \, ds,$$

so dass sich wieder eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen $\sinh s$ und $\cosh s$ ergibt. □

Beispiel 27.8. Wir wollen für die Funktion

$$\frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}^3}$$

eine Stammfunktion bestimmen. Mit der in Lemma 27.7 beschriebenen Substitution

$$t = \sin s \text{ und } dt = \cos s \, ds$$

werden wir auf die Funktion

$$\frac{1}{\sin^2 s \cdot \cos^3 s} \cdot \cos s = \frac{1}{\sin^2 s \cdot \cos^2 s}$$

geführt. Mit der in Lemma 27.4 beschriebenen Substitution

$$s = 2 \arctan u,\ ds = \frac{2}{1+u^2}du,\ \sin s = \frac{2u}{1+u^2} \text{ und } \cos s = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

werden wir auf die rationale Funktion

$$\frac{(1+u^2)^2}{4u^2} \cdot \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2} \cdot \frac{2}{1+u^2} = \frac{(1+u^2)^3}{2u^2(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{u^6+3u^4+3u^2+1}{2u^6-4u^4+2u^2}$$

geführt. Hierfür müssen wir die Partialbruchzerlegung finden. Die Division mit Rest ergibt

$$u^6+3u^4+3u^2+1 = \left(2u^6-4u^4+2u^2\right)\frac{1}{2} + 5u^4 + 2u^2 + 1,$$

so dass es also um die rationale Funktion

$$\frac{1}{2} + \frac{5u^4+2u^2+1}{2u^6-4u^4+2u^2}$$

geht. Diese Funktion ist eine rationale Funktion in $v = u^2$, so dass wir zuerst die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v^3-2v^2+v} = \frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v(v-1)^2}$$

bestimmen. Der Ansatz

$$\frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v(v-1)^2} = \frac{a}{v} + \frac{b}{v-1} + \frac{c}{(v-1)^2}$$

führt zu

$$\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2} = a(v-1)^2 + bv(v-1) + cv.$$

Einsetzen von $v = 0$, $v = 1$ und $v = 2$ führt zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= a, \\ 4 &= c, \end{aligned}$$

und

$$\frac{25}{2} = a + 2b + 2c = \frac{1}{2} + 2b + 8, \text{ also } b = 2\,.$$

Daher ist

$$\frac{\frac{5}{2}v^2 + v + \frac{1}{2}}{v(v-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{v} + \frac{2}{v-1} + \frac{4}{(v-1)^2}$$

bzw.

$$\frac{\frac{5}{2}u^4 + u^2 + \frac{1}{2}}{u^2(u^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{u^2} + \frac{2}{u^2-1} + \frac{4}{(u^2-1)^2}.$$

Mit den Identitäten

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{4}{(u^2-1)^2} &= (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1})^2 \\ &= \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u-1)(u+1)} \\ &= \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$\frac{\frac{5}{2}u^4 + u^2 + \frac{1}{2}}{u^2\,(u^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{u^2} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2}.$$

Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{2} + \frac{5u^4 + 2u^2 + 1}{2u^6 - 4u^4 + 2u^2}$$

ist daher

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{2u} - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2}\,\tan\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{s}{2}\right) - 1} - \frac{1}{\tan\left(\frac{s}{2}\right) + 1}$$

eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sin^2 s \cdot \cos^2 s}\,,$$

und

$$\frac{1}{2}\,\tan\left(\frac{\arcsin t}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{\arcsin t}{2}\right)} - \frac{1}{\tan\left(\frac{\arcsin t}{2}\right) - 1} - \frac{1}{\tan\left(\frac{\arcsin t}{2}\right) + 1}$$

ist eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}^3}\,.$$

27. Arbeitsblatt

27.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 27.1. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{e^{2t}+e^t+1}{e^{2t}-1}\,.$$

Aufgabe 27.2.* Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sinh t}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 27.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\ln 2x}{x \ln 4x}\,.$$

Aufgabe 27.4.* Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{1}{\cos t}\,.$$

Aufgabe 27.5.* a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{4s}{s^4-2s^2+1}\,.$$

b) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{4s}{s^4-2s^2+1}\,.$$

c) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sinh^2 t}\,.$$

Aufgabe 27.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sin^3 x}\,.$$

Aufgabe 27.7. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\,.$$

Aufgabe 27.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\cos(2x)\sin^2(x)\,.$$

Aufgabe 27.9. Zeige, dass die in Lemma 27.4 verwendeten Substitutionen $\sin t = \frac{2s}{1+s^2}$ und $\cos t = \frac{1-s^2}{1+s^2}$ die Kreisgleichung $x^2+y^2=1$ erfüllen.

Aufgabe 27.10. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sqrt{3x^2+4x-2}\,.$$

Aufgabe 27.11. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,.$$

Aufgabe 27.12. Erstelle ein Abbildungsdiagramm, das aufzeigt, wie sich eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen als eine zusammengesetze Funktion ergibt.

Aufgabe 27.13. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\cosh x + \sinh^2 x}\,.$$

Aufgabe 27.14. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{9a^x+4a^{-x}}$$

mit $a>1$.

27.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 27.15. (4 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{e^{2t}+e^{3t}}{e^{4t}-1}\,.$$

Aufgabe 27.16. (4 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sin(3x)\cos(x)}\,.$$

Aufgabe 27.17. (6 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}\,.$$

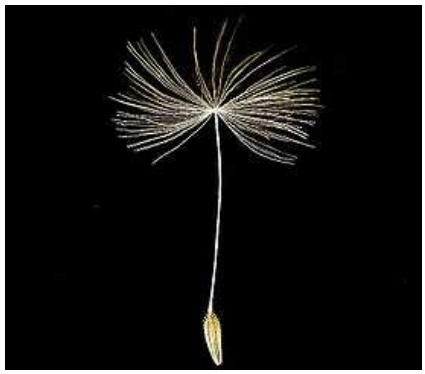
Aufgabe 27.18. (6 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^2+4x^3\sqrt{x^2+x+1}-3x}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}\,.$$

28. Vorlesung - Differentialgleichungen

28.1. **Gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.



Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe und der Änderung dieser Größe aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 28.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t,y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t,y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion in einer Variablen repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 28.2. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

heißt eine Funktion

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.

(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. In Analysis II werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Die Lösung einer Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, man muss noch Anfangsbedingungen festlegen.

Definition 28.3. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 28.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und es sei

$$f\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine Differentialgleichung bzw. ein Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

28.2. **Ortsunabhängige Differentialgleichungen.**

Definition 28.5. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ mit einer Funktion g in der einen Variablen t gilt.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Beispiel 28.6. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{t^2 - 1} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(5) = 3\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{t^2-1}$ besitzt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1},$$

daher sind die Stammfunktionen (wir beschränken uns auf $t > 1$) gleich

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + c\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(5) = 3$ führt auf

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 6 + c = 3\,,$$

also ist

$$c = 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6$$

und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t-1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t+1) + 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6\,.$$

Beispiel 28.7. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{\cosh t} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(0) = 5\,.$$

Es ist

$$\frac{1}{\cosh t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^t}{e^{2t} + 1},$$

so dass eine rationale Funktion in der Exponentialfunktion vorliegt, die wir nach Lemma 27.1 über die Substitution $t = \ln s$ lösen können. Das transformierte Integral ist dabei

$$\int \frac{2s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s} ds \,.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$2 \arctan s \,.$$

Somit ist

$$2 \arctan \left(e^t\right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cosh t}$. Für das Anfangswertproblem setzen wir

$$2 \arctan \left(e^0\right) + c = 5$$

an. Dies führt auf

$$c = 5 - 2 \arctan 1,$$

also ist

$$y(t) = 2 \arctan \left(e^t\right) + 5 - 2 \arctan 1$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

28.3. **Zeitunabhängige Differentialgleichungen.**

Definition 28.8. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ mit einer Funktion h in der einen Variablen y gilt.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende „Vektorfeld“ nicht von der Zeit ab, die Lösungsfunktionen sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

Beispiel 28.9. Wir betrachten die zeitliche Entwicklung einer Population, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist.

(1) Die Individuen der Population leben ewig.
(2) Alle Individuen beteiligen sich ab ihrer Geburt mit gleichem Engagement und gleichem Erfolgan der Fortpflanzung.
(3) Zeugung und Geburt finden gleichzeitig statt.
(4) Der Fortpflanzungserfolg eines Individuums ist unabhängig von der Größe der Gesamtpopulation.

Unter diesen Bedingungen ist die Vermehrung, also der Zuwachs der Population, allein von der momentanen Populationsgröße abhängig und proportional zu dieser. Wenn man die Populationsentwicklung als $y(t)$ ansetzt, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = cy(t)$$

(oder kurz $y' = cy$) mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungsfunktionen sind

$$\lambda e^{ct}$$

(wobei im Populationsbeispiel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist). Man spricht von *exponentiellem Wachstum* der Population, und zwar unabhängig davon, ob c groß oder klein ist.

Beispiel 28.10. Eine Wüste (oder ein Kornblumenfeld) sei kreisrund und breite sich mit der Zeit kontinuierlich aus, indem die Grenze gleichmäßig nach außen geschoben werde, und zwar pro Zeiteinheit um einen gewissen Vortrieb. Die Fläche der Wüste sei durch die Funktion gegeben $z(t)$. Die Grenze der Wüste hat somit die Länge $2\sqrt{\pi}\sqrt{z(t)}$ und diese Länge ist proportional zum Wüstenzuwachs zum Zeitpunkt t. Es ergibt sich daher eine Differentialgleichung

$$z'(t) = c\sqrt{z(t)}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$. Die Lösungen haben die Form

$$z(t) = \frac{c^2}{4}t^2,$$

wie man direkt durch Ableiten bestätigen kann.

28.4. **Differentialgleichungen höherer Ordnung.**

Galileo Galilei (1564-1642) entdeckte das Gesetz des freien Falls.

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In

diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch die Gravitation oder eine Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.

Beispiel 28.11. Ein Gegenstand der Masse m wird im Vakuum aus einer Höhe 0 zum Zeitpunkt 0 losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden (freier Fall im Vakuum). Dabei wirkt auf den Körper die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn nach dem Gesetz „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“ beschleunigt. Die Beschleunigung ist also konstant und unabhängig von der Masse. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers die Differentialgleichung

$$v'(t) = -g$$

erfüllt (die Wahl des Vorzeichens bewirkt, dass der Körper ins Negative fällt). Die durch die Anfangsbedingung (der Gegenstand ruhe zum Zeitpunkt 0) $v(0) = 0$ festgelegte Lösung ist daher

$$v(t) = -gt.$$

Der zurückgelegte Weg $y(t)$ des Körpers ergibt sich wiederum aus der Differentialgleichung

$$y'(t) = v(t) = -gt,$$

die besagt, dass die Ableitung des Weges nach der Zeit die Momentangeschwindigkeit beschreibt. Die Lösung davon ist

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Den Gesamtvorgang kann man durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -g$$

ausdrücken.

Beispiel 28.12. Ein Gegenstand der Masse m wird aus der Höhe losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden. Dabei wirkt auf den Körper einerseits die Gravitationskraft gm (die Erdbeschleunigung g nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn beschleunigt, andererseits wird diese Beschleunigung durch den Luftwiderstand verringert. Nach einem physikalischen Gesetz ist die Reibung (bei relativ kleinen Geschwindigkeiten) proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers. Es sei β der Reibungswiderstand, also dieser Proportionalitätsfaktor. Die auf den Körper (nach unten) wirkende Gesamtkraft ist daher

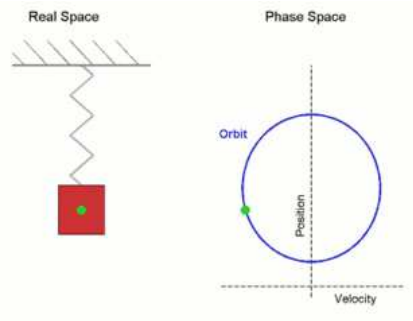
$$F(t) = gm - \beta y'(t).$$

Wegen

$$y''(t) = \frac{F(t)}{m}$$

gilt daher für diesen Bewegungsvorgang die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g.$$



Beispiel 28.13. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden, wobei die auf den Punkt (in Richtung des Nullpunkts) wirkende Kraft (bzw. Beschleunigung) proportional zur Lage des Punktes sein soll. Wenn der Punkt sich in $\mathbb{R}_+$ befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir $y(0) = 0$ und $y'(0) = v$, zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit v besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben.

28. Arbeitsblatt

28.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 28.1.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2 \text{ mit } y(5) = 3\,.$$

Aufgabe 28.2.*

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5\,.$$

Aufgabe 28.3. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7\,.$$

Aufgabe 28.4. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4\,.$$

Aufgabe 28.5. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

Aufgabe 28.6. Untersuche die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die sowohl zeit- als auch ortsunabhängig sind.

Aufgabe 28.7. Wie sieht der Graph einer Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus, die nur von einer Variablen abhängt.

Aufgabe 28.8. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y\,.$$

Die folgende Aufgabe setzt Aufgabe 19.11 voraus.

Aufgabe 28.9. Es sei

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Dimension der Eigenräume der Ableitung

$$D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}\,(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,,\ f \longmapsto f'.$$

Aufgabe 28.10. Finde die Lösungen für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = cy^{\frac{2}{3}}$$

mit $c \in \mathbb{R}_+$.

Finde eine inhaltliche Interpretation zu dieser Differentialgleichung analog zu Beispiel 28.10.

Aufgabe 28.11. Zeige, dass $y(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = ny^{\frac{n-1}{n}}$$

auf $\mathbb{R}_+$ ist.

Aufgabe 28.12. Finde eine differenzierbare Funktion $y(t)$ (nicht die Nullfunktion), die die Bedingung

$$y'(t) = y(t-1)$$

erfüllt (dabei ist $y(t-1)$ als der Wert der Funktion y an der Stelle $t-1$ zu verstehen, nicht als das Produkt der Funktionsvariablen y mit $t-1$; es handelt sich also *nicht* um eine Differentialgleichung).

Aufgabe 28.13. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y\,.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2\,.$$

Aufgabe 28.14. Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = -y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 5 \text{ und } y'(0) = 6\,.$$

Aufgabe 28.15. Zeige, dass die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = 0$$

einen n-dimensionalen reellen Vektorraum bilden.

28.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 28.16. (3 Punkte)
Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = t + y\,.$$

Aufgabe 28.17. (4 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2+1} \text{ mit } y(1) = 2\,.$$

Aufgabe 28.18. (4 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y'(t) \;=\; \frac{1}{\sinh\, t}$$

auf $\mathbb{R}_+$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 7$.

Aufgabe 28.19. (4 Punkte)
Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y''\,.$$

Aufgabe 28.20. (5 Punkte)
Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ unendlich oft differenzierbare Funktionen

$$f\colon\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

derart gibt, dass die n-te Ableitung $f^{(n)}$ mit f übereinstimmt, die Ableitungen $f^{(i)}$, $i < n$, aber nicht.

Aufgabe 28.21. (4 Punkte)
Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f\colon\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

29. Vorlesung - Lineare Differentialgleichungen

29.1. **Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Definition 29.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y$$

mit einer Funktion (I reelles Intervall)

$$g\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

heißt *lineare Differentialgleichung* bzw. genauer *gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung.*

Linear bedeutet hierbei, dass in $f(t,y) = g(t)y$ der Ort y linear eingeht, d.h. zu jedem fixierten Zeitpunkt t_0 ist $f(t_0,y)$ eine lineare Funktion in y.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können. Die Nullfunktion ist natürlich immer eine Lösung, interessant sind daher die Lösungen, die noch zusätzliche Eigenschaften (typischerweise eine Anfangsbedingung) erfüllen.

Satz 29.2. *Es sei*

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$g\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Es sei G eine Stammfunktion zu g auf I. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gleich

$$y(t) = c \cdot \exp\left(G(t)\right) \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst gibt es eine Stammfunktion G von g aufgrund von Korollar 24.5, so dass die angegebenen Funktionen existieren. Durch Ableiten bestätigt man direkt, dass diese Funktionen wirklich Lösungen sind. Es sei y eine beliebige Lösungsfunktion. Wir betrachten den Quotienten

$$\begin{aligned}\left(\frac{y(t)}{\exp\, G(t)}\right)' &= \frac{y'(t)\exp\, G(t) - y(t)\cdot(\exp\left(G(t)\right)\cdot g(t))}{\exp^2\, G(t)} \\ &= \frac{y(t)g(t)\exp\, G(t) - y(t)\cdot(\exp\left(G(t)\right)\cdot g(t))}{\exp^2\, G(t)} \\ &= 0,\end{aligned}$$

so dass aufgrund von Lemma 24.6 der Quotient $\frac{y(t)}{\exp\, G(t)}$ konstant sein muss, woraus die Behauptung folgt. Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ legt den Skalar $c = \frac{y_0}{\exp\left(G(t_0)\right)}$ eindeutig fest. □

Beispiel 29.3. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 0$$

besitzt genau die konstanten Lösungen

$$y(t) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Dies folgt direkt aus Lemma 24.6, aber auch aus Satz 29.2.

Beispiel 29.4. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y$$

besitzt genau die Lösungen

$$y(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 29.5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ay$$

besitzt nach Satz 29.2 die Lösungen

$$y(t) = ce^{at} \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

In den bisherigen Beispielen war die Funktion $g(t)$ konstant, und es war besonders einfach, die Lösungen anzugeben. Man spricht von einer *homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. Die folgenden Beispiele besitzen keine konstanten Koeffizienten, sondern variable Koeffizienten. Diese Differentialgleichungen sind sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Beispiel 29.6. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = \frac{1}{t}$ ist der natürliche Logarithmus. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher nach Satz 29.2 gleich

$$c \cdot \exp(\ln t) = ct$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 29.7. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung $(t > 1)$

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung gelangt man zur Stammfunktion

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t-1) - \frac{1}{2} \ln(t+1)\,.$$

Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right) = c \cdot \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}\,.$$

Beispiel 29.8. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2+1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

eine solche ist durch

$$G(t) = \arctan t$$

gegeben. Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp(\arctan t)\,.$$

29.2. **Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Es gibt homogene lineare Gleichungsysteme, bei denen es darum geht, den Kern einer linearen Abbildung zu bestimmen, und es gibt inhomogene lineare Gleichungssysteme, wo man das Urbild zu einem Vektor (Störvektor) unter einer linearen Abbildung bestimmen soll. Auch zu den linearen Differentialgleichungen gibt es eine inhomogene Variante, bei der eine *Störfunktion* die Sache verkompliziert. Wie bei linearen Gleichungssystemen ist es auch hier wichtig, zuerst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen.

Definition 29.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung.*

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.

Satz 29.10. *Es sei*

$$y' = g(t)y + h(t)$$

eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stetigen Funktionen $g, h\colon I \to \mathbb{R}$. Es sei G eine Stammfunktion von g und es sei

$$a(t) = \exp(G(t))$$

eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung. Dann sind die Lösungen (auf I) der inhomogenen Differentialgleichung genau die Funktionen

$$y(t) = c(t)a(t)\,,$$

wobei $c(t)$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ ist. Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y + h(t) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Da $a(t)$ keine Nullstelle besitzt, kann man jede (differenzierbare) Funktion

$$y\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$y(t) = c(t)a(t)$$

mit einer unbekannten (differenzierbaren) Funktion $c(t)$ ansetzen. Dabei ist (für eine differenzierbare Funktion y)

$$y'(t) = c'(t)a(t) + c(t)a'(t)\,.$$

Daher kann man die Lösungsbedingung

$$y'(t) = g(t)y(t) + h(t)$$

als

$$c'(t)a(t) + c(t)a'(t) = g(t)c(t)a(t) + h(t)$$

schreiben, und diese gilt wegen $a'(t) = g(t)a(t)$ genau dann, wenn

$$c'(t)a(t) = h(t)$$

bzw.

$$c'(t) = \frac{h(t)}{a(t)}$$

gilt. D.h. $c(t)$ muss eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ sein. Es sei nun noch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ vorgegeben. Mit c ist auch $c(t) + c_0$ für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$. Die Bedingung

$$y_0 = (c(t_0) + c_0)a(t_0)$$

legt dann c_0 eindeutig fest. □

Die in diesem Satz verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten*. Man ersetzt dabei die Lösungsfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung, also $ca(t)$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$, durch eine variable Funktion $c(t)$.

Beispiel 29.11. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' \ = \ ay + b$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$z(t) \ = \ e^{at}$$

ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 29.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu be^{-at} bestimmen. Diese sind

durch $-\frac{b}{a}e^{-at}+c$ gegeben. Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$\left(-\frac{b}{a}e^{-at}+c\right)\cdot e^{at} \;=\; c\cdot e^{at}-\frac{b}{a}.$$

Lieber den Kaffee trinken, bevor er gemäß einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung die Außentemperatur angenommen hat.

Eine solche Differentialgleichung tritt bei Abkühlungsprozessen auf. Wenn ein (heißer) Körper (beispielsweise eine Tasse Kaffee) sich in einem umgebenden Medium (beispielsweise in einem Straßencafé) mit konstanter Außentemperatur A befindet, so wird die Temperaturentwicklung $y(t)$ des Körpers nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz durch die Differentialgleichung

$$y'(t) \;=\; -d(y(t)-A)$$

beschrieben. Dieses Gesetz besagt, dass die Abkühlung proportional zur Differenz zwischen Außentemperatur und Körpertemperatur ist (der Proportionalitätsfaktor $d>0$ hängt vom Körper ab). Die Lösungen sind

$$y(t) \;=\; ce^{-dt}+A.$$

Dabei ist das c durch eine Anfangsbedingung bestimmt, also typischerweise durch die Anfangstemperatur des Körpers zum Zeitpunkt 0. Für $t\to+\infty$ nimmt der Körper die Außentemperatur A an.

Beispiel 29.12. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y + t^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(3) = 4$. Die Exponentialfunktion $a(t) = e^t$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 29.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{e^t} \;=\; t^2\cdot e^{-t}$$

finden. Mit zweifacher partieller Integration findet man die Stammfunktion

$$\left(-t^2-2t-2\right)e^{-t}.$$

Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$e^t\left(\left(-t^2-2t-2\right)e^{-t}+c\right) \;=\; -t^2-2t-2+ce^t.$$

Wenn wir noch die Anfangsbedingung $y(3) = 4$ berücksichtigen, so ergibt sich die Bedingung

$$-9-6-2+ce^3 \;=\; -17+ce^3 \;=\; 4,$$

also $c = \frac{21}{e^3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = -t^2-2t-2+\frac{21}{e^3}e^t\,.$$

Beispiel 29.13. Wir betrachten für $t > 1$ die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' \;=\; \frac{y}{t^2-1}+t-1$$

mit der Anfangsbedingung $y(2) = 5$. Hier ist also $h(t) = t-1$ die Störfunktion und

$$y' = \frac{y}{t^2-1}$$

ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{t^2-1}$ ist

$$G(t) \;=\; \frac{1}{2}\ln(t-1)-\frac{1}{2}\ln(t+1) \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \;=\; \ln\left(\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}\right).$$

Daher ist nach Satz 29.2 (bzw. nach Beispiel 29.7)

$$a(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

eine Lösung zur homogenen Differentialgleichung. Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$\frac{h(t)}{a(t)} \;=\; \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}}\cdot(t-1) \;=\; \sqrt{t+1}\cdot\sqrt{t-1} \;=\; \sqrt{t^2-1}.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$c(t) \;=\; \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1}-\;\operatorname{arcosh}\,t\right).$$

Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung haben also die Gestalt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1}-\;\operatorname{arcosh}\,t\right)+c\right)$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$5 \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-\;\operatorname{arcosh}\,2\right)+c_0\right) \;=\; 1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\;\operatorname{arcosh}\,2+c_0\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$c_0 \;=\; 4\sqrt{3}+\frac{1}{2}\;\operatorname{arcosh}\,2$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \right) + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2 \right).$$

29. Arbeitsblatt

29.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 29.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}.$$

Aufgabe 29.2. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}.$$

Aufgabe 29.3. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y.$$

Aufgabe 29.4. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7.$$

Aufgabe 29.5. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$

Aufgabe 29.6. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 18.21, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 29.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

Aufgabe 29.8. Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 29.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2 - 1)$$

erfüllen.

Aufgabe 29.9.*

Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2(t-1)}$$

für $t > 1$.

Aufgabe 29.10.*

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Aufgabe 29.11.*

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3) \cos t$$

für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3) \cos t \text{ mit } y(0) = 7\,.$$

Aufgabe 29.12.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y.$$

b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y + t^2.$$

Aufgabe 29.13. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

29.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 29.14. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 3}\,.$$

Aufgabe 29.15. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = (t+2)y + t \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right)\,.$$

Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(1) = \pi$?

Aufgabe 29.16. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2+2} y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 29.17. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1\,.$$

Aufgabe 29.18. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3 - 2t + 5}{t^2 - 3}\,.$$

30. Vorlesung - Getrennte Variablen

30.1. **Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.**

Definition 30.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h\colon\ J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Diese ist offen, wenn I und J offen sind. Eine homogene lineare Differentialgleichung besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt. Die Grundidee ist dann, auf die Gleichung

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} \ = \ g(t)$$

die Substitutionsregel anzuwenden.

Satz 30.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit stetigen Funktionen

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

und

$$h\colon J \longrightarrow \mathbb{R},\, y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t))\,.$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \text{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ und $H(y_0) = 0$ erfüllen, so ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H streng monoton und daher injektiv (also bijektiv auf sein Bild) ist. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} \\ &= \frac{g(t)}{1/h(H^{-1}(G(t)))} \\ &= g(t) \cdot h(H^{-1}(G(t))) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\,dt = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)}\,dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 bzw. $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen muss man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenze wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und $\tilde{H}$ zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und $\tilde{G}$ zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h.

die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Es gilt also einerseits $H(y(t)) = G(t)$ und andererseits $H(\tilde{y}(t)) + c = \tilde{H}(\tilde{y}(t)) = \tilde{G}(t) = G(t) + d$, so dass $H(\tilde{y}(t)) - H(y(t)) = d - c$ gilt, woraus wegen $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ sofort $c = d$ folgt. Also ist $H(\tilde{y}(t)) = G(t) = H(y(t))$ und somit wegen der Injektivität von H auch $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle t. □

Durch einen Übergang von G nach $G + c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit $G(I') \subseteq H(J)$. Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

Korollar 30.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h\colon\ J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}\colon\ J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t + c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall[25] *$H(J) - c$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 30.2. □

Korollar 30.4. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ und einer stetigen Funktion

$$g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)},$$

wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Beweis. Siehe Aufgabe 30.11. □

[25] Mit $I + c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I + c = \{x \in \mathbb{R} | \, x - c \in I\}$. Bei $I = [a, b]$ ist also $I + c = [a + c, b + c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} + c = \mathbb{R}$.

Beispiel 30.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 30.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y}$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 27.5 die Funktion

$$H\colon\ J \longrightarrow J' = \mathbb{R},\ y \longmapsto H(y) = \ln\left(\tan\frac{y}{2}\right).$$

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln\left(\tan\frac{y}{2}\right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2\arctan\left(e^u\right).$$

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2\arctan\left(e^{t+c}\right)$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 30.6. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 30.3 y integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t+c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 30.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten

offenen Intervall definiert. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d.h. die Lösung „entweicht“.

Beispiel 30.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

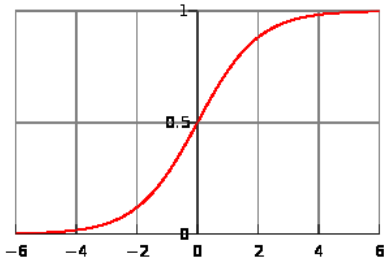
für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Lösung $g(t) = \frac{1}{t}$.



Eine logistische Funktion

Beispiel 30.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t. Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t. Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t. Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p. Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß des oben formulierten Zusammenhanges gilt

$$p'(t) \;=\; p(t) \cdot r(t) \;=\; p(t) \cdot w(p(t)).$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate* $w(p) = a$ liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*.

Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) \;=\; s\left(1 - \frac{1}{g}p\right)$$

und die Differentialgleichung

$$p' \;=\; sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right) \;=\; sp - \frac{s}{g}p^2.$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right)} \;&=\; \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &=\; \frac{1}{s}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p}\right) \end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) \;=\; \frac{1}{s}(\ln p - \ln(g-p)) \;=\; \frac{1}{s}\ln\frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u \;=\; \frac{1}{s}\ln\frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) \;=\; \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$, für $t \to +\infty$ strebt die Lösung gegen g (die Grenzbevölkerung) und für $t \to -\infty$ gegen 0.

30. Arbeitsblatt

30.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 30.1. Bestätige die in Beispiel 30.6, Beispiel 30.7 und Lemma 30.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

durch Ableiten.

Aufgabe 30.2. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.3. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.4. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.5. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\sin y}\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.6. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.7.*

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Aufgabe 30.8.*

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Aufgabe 30.9.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2},\ y > 0,\ t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \text{ mit } y(1) = 1\,.$$

Aufgabe 30.10. Betrachte die in Beispiel 30.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$.

c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.

d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*).

e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

30.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 30.11. (3 Punkte)
Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit einer stetigen Funktion

$$g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

auf einem Intervall I' die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$

besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Aufgabe 30.12. (3 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty^2,\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.13. (4 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = t^3y^3,\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.14. (3 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\sin\ t\ - 2t)\left(y^2 + 1\right),\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(0) = \pi$?

Aufgabe 30.15. (5 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty + t$$

mit

a) dem Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen,

b) dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Anhang A: Bildlizenzen

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also http://commons.wikimedia.org), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/User:

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Georg Cantor 1894.jpg , Autor = Benutzer Taxiarchos228 auf Commons, Lizenz = PD 10

Quelle = David Hilbert 1886.jpg , Autor = Unbekannt (1886), Lizenz = PD 10

Quelle = Geometri cylinder.png , Autor = Benutzer Anp auf sv Wikipedia, Lizenz = PD 14

Quelle = Aplicación 2.svg, Autor = Benutzer HiTe auf Commons, Lizenz = PD 22

Quelle = Beliebteste Eissorten in Deutschland.svg, Autor = Benutzer Doofi auf Commons, Lizenz = PD 22

Quelle = Tiefkühlkonsum.svg, Autor = Benutzer SInner1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 22

Quelle = Exp.svg, Autor = Peter John Acklam, Lizenz = CC-by-sa 3.0 22

Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png, Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD 22

Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png, Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 22

Quelle = Elliptic orbit.gif, Autor = Benutzer Brandir auf Commons, Lizenz = CC-BY-SA 2.5 22

Quelle = Pascal triangle.svg , Autor = Benutzer Kazukiokumura auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 37

Quelle = Yanghui triangle.gif , Autor = Benutzer Noe auf Commons, Lizenz = PD 38

Quelle = TrianguloPascal.jpg , Autor = Pascal (= Benutzer Drini auf Commons), Lizenz = PD 38

Quelle = A plus b au carre.svg , Autor = Benutzer Alkarex auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0 39

Quelle = Binomio al cubo.svg , Autor = Drini, Lizenz = PD 39

Quelle = Absolute value.svg , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 46

Quelle = Bernoulli inequality.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 47

Quelle = Archimedes (Idealportrait).jpg , Autor = Benutzer Ixitixel auf Commons, Lizenz = PD 48

Quelle = Floor function.svg , Autor = Benutzer Omegatron auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 50

Quelle = Heron von Alexandria.jpg , Autor = Benutzer Frank C. Müller auf Commons, Lizenz = PD 55

Quelle = Konvergenz.svg , Autor = Benutzer Matthias Vogelgesang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 58

Quelle = Cauchy sequence - example.png , Autor = Benutzer Pred auf da.wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5 58

Quelle = Augustin Louis Cauchy.JPG , Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD 68

Quelle = Karl Weierstrass 2.jpg , Autor = Conrad Fehr, Lizenz = PD 77

Quelle = Intervallschachtelung e.gif , Autor = Benutzer Caldrac auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 78

Quelle = Leonhard Euler by Handmann .png , Autor = Emanuel Handmann (= Benutzer QWerk auf Commons), Lizenz = PD 79

Quelle = Halbkreis.jpg , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 80

Quelle = Complex number illustration.svg , Autor = Benutzer Wolfkeeper auf en. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 85

Quelle = Euler's formula.svg , Autor = Benutzer Wereon auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 86

Quelle = Oresme-Nicole.jpg , Autor = Benutzer Leinad-Z auf Commons, Lizenz = PD 96

Quelle = Harmonischebrueckerp.jpg , Autor = Benutzer Anton auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5 97

Quelle = Geometric series 14 square.svg , Autor = Benutzer Melchoir auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 99

Quelle = KochFlake.svg , Autor = Benutzer Wxs auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 101

Quelle = ?-bronze.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 105

Quelle = TooManyPigeons.jpg , Autor = Benutzer McKay auf en Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 108

Quelle = Diagonal argument.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 110

Quelle = 1925 kurt gödel.png , Autor = Benutzer Kl833x9 auf Commons, Lizenz = PD 112

Quelle = Polynomialdeg5.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 116

Quelle = Function-1 x.svg , Autor = Benutzer Qualc1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 120

Quelle = Heaviside.svg , Autor = Benutzer Lenny222 auf Commons, Lizenz = PD 126

Quelle = WeierstrassFunction.svg , Autor = Benutzer Eeyore22 auf Commons, Lizenz = PD 126

Quelle = RationalDegree2byXedi.gif , Autor = Benutzer Sam Derbyshire auf en. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 128

Quelle = Intermediatevaluetheorem.svg , Autor = Enoch Lau (= Benutzer Kpengboy auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 3.0 136

Quelle = RacineNieme.svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 138

Quelle = Extrema example it.svg , Autor = Benutzer KSmrq auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 139

Quelle = Exponentials(2).svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 147

Quelle = Exp.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 154

Quelle = Exp series.gif , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 162

Quelle = Exponentials.svg , Autor = Benutzer Superborsuk auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5 171

Quelle = Fonctionslog3.svg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 172

Quelle = Tangente2.gif , Autor = Benutzer Loveless auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 180

Quelle = Schema Règle produit.png , Autor = Benutzer ThibautLienart auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 183

Quelle = FunktionUmkehrTangente.svg , Autor = Jonathan Steinbuch, Lizenz = CC-by-sa 3.0 185

Quelle = X Cubed.svg , Autor = Benutzer Pieter Kuiper auf Commons, Lizenz = PD 192

Quelle = Mvt2 italian.svg , Autor = Benutzer 4C auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 193

Quelle = Guillaume de l'Hôpital.jpg , Autor = Benutzer Bemoeial auf Commons, Lizenz = PD 195

Quelle = Convex set.svg , Autor = Oleg Alexandrov, Lizenz = PD 200

Quelle = Non Convex set.svg , Autor = Kilom691, Lizenz = CC-by-sa 3.0 200

Quelle = Convex supergraph.svg , Autor = DieBuche, Lizenz = PD 201

Quelle = Sinh-cosh-r-28pt.svg , Autor = Benutzer Emdee auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 209

Quelle = Pi pie2.jpg , Autor = Pip_pie2 (= Benutzer GJ auf engl. Wikipedia), Lizenz = PD 211

Quelle = Sine cosine plot.svg , Autor = Benutzer Qualc1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 212

Quelle = 8th-root-of-unity.jpg , Autor = Benutzer Marek Schmidt auf Commons, Lizenz = PD 216

Quelle = 3rd roots of unity.svg , Autor = Benutzer Marek Schmidt und Nandhp auf Commons, Lizenz = PD 216

Quelle = Taylor Brook Goupy NPG.jpg , Autor = Louis Goupy (= Benutzer Astrochemist auf Commons), Lizenz = PD 221

Quelle = Sintay.svg , Autor = Benutzer Qualc1 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 225

Quelle = Integral as region under curve.svg , Autor = Benutzer 4C auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 230

Quelle = Histogram example.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 231

Quelle = Integral approximations.svg , Autor = Benutzer KSmrq auf Commons, Lizenz = CC-vy-sa 3.0 233

Quelle = MittelwertsatzDerIntegralrechnung-f grad5.png , Autor = Der Mathekernel, Lizenz = CC-by-sa 3.0 242

Quelle = HauptsatzDerInfinitesimalrechnung-f grad5.gif , Autor = DerMathekernel, Lizenz = CC-by-sa 3.0 243

Quelle = GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg , Autor = Godfrey Kneller, Lizenz = PD 245

Quelle = Gottfried Wilhelm Leibniz c1700.jpg , Autor = Johann Friedrich Wentzel d. Ä. (= Benutzer AndreasPraefcke auf Commons), Lizenz = PD 246

Quelle = John Wallis.jpg , Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 256

Quelle = FunktionUmkehrIntegralOhne.svg , Autor = Jonathan Steinbuch (= Benutzer Jonathan.Steinbuch auf Commons), Lizenz = CC-BY-SA-3.0 257

Quelle = Funktion.Flaechenvariation.png , Autor = M. Gausmann, Lizenz = CC-by-sa 3.0 265

Quelle = Taraxacum sect Ruderalia13 ies.jpg , Autor = Frank Vincentz, Lizenz = CC-by-sa 3.0 287

Quelle = Galileo.arp.300pix.jpg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 291

Quelle = Simple Harmonic Motion Orbit.gif , Autor = Benutzer Mazemaster auf Commons, Lizenz = PD 293

Quelle = Cup of coffee 5084862159.jpg , Autor = Jason Walsh (= Benutzer Lobo auf Commons), Lizenz = CC-by-2.0 301

Quelle = Logistic-curve.svg , Autor = Qef, Lizenz = PD 310