Fachbereich Mathematik/Informatik **25. März 2015**
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögliche Pkt.:	3	3	2	3	3	4	5	7	2	4	8	2	2	3	4	9	64
erhaltene Pkt.:																	

Note:

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper.
(2) Die *komplexe Konjugation.*
(3) Ein *Häufungspunkt* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(4) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(5) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß.*
(2) Das *Quotientenkriterium* für eine komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
(3) Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \geq 0$. Zeige, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn

$$x^2 \geq y^2$$

gilt.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

In einem Hörsaal befindet sich ein Tafelgestell mit drei hintereinander liegenden, vertikal verschiebbaren Tafeln. Diese seien mit V (vordere Tafel), M (mittlere Tafel) und H (hintere Tafel) bezeichnet. Aufgrund der Höhe des Gestells sind nur (maximal) zwei Tafeln gleichzeitig einsehbar. Die Lehrperson schreibt in der Vorlesung jede Tafel einmal voll. In welcher Reihenfolge (alle Möglichkeiten) muss sie die Tafeln einsetzen, wenn beim Beschreiben einer Tafel stets die zuletzt beschriebene Tafel sichtbar sein soll.

AUFGABE 5. (3 Punkte)

Bestimme das Konvergenzverhalten der durch

$$x_n = (-1)^n \frac{7n^2 - 8n + 6}{4n^2 + 3n - 1}$$

gegebenen Folge.

AUFGABE 6. (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

AUFGABE 7. (5 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) f ist stetig im Punkt x.
(2) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(Das Folgenkriterium für stetige Funktionen darf verwendet werden.)

AUFGABE 8. (7 Punkte)

Zeige, dass eine stetige Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gleichmäßig stetig ist.

AUFGABE 9. (2 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion ohne Nullstelle. Bestimme die Ableitung von $g(x) = \frac{(f(x))^n}{f(x^n)}$ für $n \in \mathbb{N}+$.

AUFGABE 10. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Funktion $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ für $x \to 0$ $(x > 0)$.

Aufgabe 11. (8 (1+4+3) Punkte)

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Finde den oder die Fehler im folgenden „Beweis“ für die Aussage, dass man zu zwei stetigen Funktionen

$$f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine Stammfunktion zu fg finden kann, indem man (geeignete) Stammfunktionen zu f und zu g miteinander multipliziert.

„Es sei F eine Stammfunktion zu f und G eine Stammfunktion zu g, die wir beide positiv wählen, was wegen der Positivität von f und g möglich ist. Für positive Zahlen ist der natürliche Logarithmus definiert, so dass man diese Funktionen mit dem Logarithmus verknüpfen kann. Dabei ist $\ln F$ eine Stammfunktion von $\ln f$ und $\ln G$ eine Stammfunktion von $\ln g$. Nach der Additionsregel für Stammfunktionen ist somit $\ln F + \ln G$ eine Stammfunktion von $\ln f + \ln g$. Wir wenden auf diese Situation die Umkehrfunktion des Logarithmus, also die Exponentialfunktion an, und erhalten mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass

$$\exp(\ln F + \ln G) = \exp(\ln F) \cdot \exp(\ln G) = F \cdot G$$

eine Stammfunktion von

$$\exp(\ln f + \ln g) = \exp(\ln f) \cdot \exp(\ln g) = f \cdot g$$

ist.“

Aufgabe 13. (2 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (es muss nicht gezeigt werden, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Innern des Intervalls angenommen wird).

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \,.$$

Aufgabe 15. (4 Punkte)

Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x^4+1}$$

unter Verwendung der Zerlegung

$$x^4+1 \;=\; \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

Aufgabe 16. (9 (3+3+3) Punkte)

a) Es sei

$$f\colon\, \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein nullstellenfreies Vektorfeld, d.h. $f(t,y) \neq 0$ für alle $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass jede Lösungskurve zur Differentialgleichung

$$y' \;=\; f(t,y)$$

injektiv ist.

b) Sei f nun ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Zeige, dass f genau dann nullstellenfrei ist, wenn jede Lösungskurve injektiv ist.

c) Man gebe ein Beispiel für ein Vektorfeld, das nicht nullstellenfrei ist, für das aber jede Lösungskurve injektiv ist.