Fachbereich Mathematik/Informatik **25. März 2015**
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

Klausur- Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *angeordneter* Körper.
(2) Die *komplexe Konjugation.*
(3) Ein *Häufungspunkt* einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(4) Die *Stetigkeit in einem Punkt* $a \in \mathbb{K}$ einer Abbildung $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(5) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

Lösung

(1) Ein Körper K heißt *angeordnet*, wenn es eine totale Ordnung „$\geq$“ auf K gibt, die die beiden Eigenschaften
(a) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$)
(b) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$)
erfüllt.
(2) Die Abbildung
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi,$$
heißt komplexe Konjugation.
(3) Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_n mit $|x_n - x| \leq \epsilon$ gibt.
(4) Man sagt, dass f stetig im Punkt a ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x mit $|a - x| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(a) - f(x)| \leq \epsilon$ gilt.
(5) Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

derart gibt, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 mit

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T$$

gibt.

(6) Das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f im Entwicklungspunkt a.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.
(2) Das *Quotientenkriterium* für eine komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
(3) Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*.

Lösung

(1) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.
(2) Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
(3) Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; f(c)(b-a).$$

Aufgabe 3. Es sei K ein angeordneter Körper und $x, y \geq 0$. Zeige, dass $x \geq y$ genau dann gilt, wenn

$$x^2 \;\geq\; y^2$$

gilt.

Lösung

Wenn $x \geq y$ ist, so folgt daraus durch Multiplikation mit $y \geq 0$ die Abschätzung

$$xy \;\geq\; y^2$$

und durch Multiplkation mit $x \geq 0$ auch

$$x^2 \;\geq\; xy,$$

woraus sich insgesamt

$$x^2 \geq y^2$$

ergibt.

Sei nun

$$x^2 \geq y^2$$

vorausgesetzt. Wenn

$$x < y$$

gelten würde, so würde sich mit der Hinrichtung direkt

$$y^2 \geq x^2$$

ergeben, also insgesamt

$$x^2 = y^2.$$

Wegen $x, y \geq 0$ folgt daraus

$$x = y,$$

ein Widerspruch.

Aufgabe 4. In einem Hörsaal befindet sich ein Tafelgestell mit drei hintereinander liegenden, vertikal verschiebbaren Tafeln. Diese seien mit V (vordere Tafel), M (mittlere Tafel) und H (hintere Tafel) bezeichnet. Aufgrund der Höhe des Gestells sind nur (maximal) zwei Tafeln gleichzeitig einsehbar. Die Lehrperson schreibt in der Vorlesung jede Tafel einmal voll. In welcher Reihenfolge (alle Möglichkeiten) muss sie die Tafeln einsetzen, wenn beim Beschreiben einer Tafel stets die zuletzt beschriebene Tafel sichtbar sein soll.

Lösung

Die Tafeln M und H sind nicht gleichzeitig sichtbar, da (mindestens) eine davon durch V verdeckt wird. Dagegen sind sowohl V und H (M wird hinter V geschoben) als auch V und M gleichzeitig einsehbar. Eine Beschreibungsreihenfolge erfüllt also genau dann die angegebene Bedingung, wenn M und H nicht direkt hintereinander beschrieben werden. Dies wird genau dann erreicht, wenn V als zweite Tafel beschrieben wird. Erlaubt sind also die beiden Reihenfolgen $M - V - H$ und $H - V - M$.

Aufgabe 5. Bestimme das Konvergenzverhalten der durch

$$x_n = (-1)^n \frac{7n^2 - 8n + 6}{4n^2 + 3n - 1}$$

gegebenen Folge.

Lösung

Wir schreiben die Folge (es sei $n \geq 1$) als

$$x_n = (-1)^n \frac{7n^2 - 8n + 6}{4n^2 + 3n - 1} = (-1)^n \frac{7 - \frac{8}{n} + \frac{6}{n^2}}{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Das Zählerpolynom konvergiert gegen 7 und das Nennerpolynom konvergiert gegen 4. Damit konvergiert die Teilfolge x_n für gerades n gegen $\frac{7}{4}$ und die Teilfolge x_n für ungerades n gegen $-\frac{7}{4}$. Somit sind sowohl $\frac{7}{4}$ als auch $-\frac{7}{4}$ Häufungspunkte der Folge und daher liegt keine Konvergenz vor.

Aufgabe 6. Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

Lösung

Die Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.

Aufgabe 7. Es sei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge,

$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion und $x \in T$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) f ist stetig im Punkt x.
(2) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Lösung

Aufgrund des Folgenkriteriums müssen wir zeigen, dass wenn (2) erfüllt ist, dass dann der Grenzwert stets der Funktionswert des Grenzwertes ist. Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen x konvergiert. Die Bildfolge $f(x_n)$ konvergiert nach Voraussetzung, sagen wir gegen b. Wir müssen $b = f(x)$ zeigen. Wir betrachten dann die Folge

$$x_1, x, x_2, x, x_3, x, x_4, \ldots .$$

Diese Folge konvergiert offenbar gegen x, deshalb muss nach Voraussetzung auch die Bildfolge konvergieren, sagen wir gegen c. Jede Teilfolge davon muss ebenfalls gegen c konvergieren. Die Teilfolge, die durch die ungeraden Folgenglieder gegeben ist, ist $f(x_n)$, und diese konvergiert gegen b. Also ist $b = c$. Die Teilfolge, die durch die geraden Folgenglieder gegeben ist, ist die konstante Folge $f(x)$, die gegen $f(x)$ konvergiert. Also ist $f(x) = b$.

Aufgabe 8. Zeige, dass eine stetige Funktion

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gleichmäßig stetig ist.

Lösung

Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $\delta > 0$ ein Punktepaar $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| \leq \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ gibt. Insbesondere gibt es somit für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Punktepaar $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge x_n eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge, deren Grenzwert, nennen wir ihn x, wegen der Abgeschlossenheit zum Intervall gehören muss. Die Glieder der Teilfolge besitzen die eingangs beschriebenen Eigenschaften, deshalb können wir direkt annehmen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren dann nach dem Folgenkriterium auch die beiden Bildfolgen $f(x_n)$ und $f(y_n)$ gegen $f(x)$. Es sei nun $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist für n hinreichend groß sowohl $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon'$ als auch $|f(y_n) - f(x)| \leq \epsilon'$. Dies ergibt mit der Dreiecksungleichung einen Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

Aufgabe 9. Es sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion ohne Nullstelle. Bestimme die Ableitung von $g(x) = \frac{(f(x))^n}{f(x^n)}$ für $n \in \mathbb{N}_+$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{n\,(f(x))^{n-1} \cdot f'(x) \cdot f(x^n) - (f(x))^n \cdot f'(x^n) \cdot nx^{n-1}}{(f(x^n))^2} \\ &= n\,(f(x))^{n-1} \cdot \frac{f'(x) \cdot f(x^n) - f(x) f'(x^n) x^{n-1}}{(f(x^n))^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Bestimme den Grenzwert der Funktion $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ für $x \to 0$ $(x > 0)$.

Lösung

Es ist

$$f(x) = (\cos x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln (\cos x)\right)$$

und somit ist

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\,(\,\cos\,x\,)\right)$$

zu bestimmen. Da die Exponentialfunktion stetig ist, müssen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(\,\cos\,x\,)}{x}$$

bestimmen. Sowohl die Zähler- als auch die Nennerfunktion besitzen den Grenzwert 0. Wir können die Regel von Hospital anwenden und betrachten

$$\frac{\frac{-\,\sin\,x}{\cos\,x}}{1}\,.$$

Dies konvergiert für $x \to$ gegen 0. Somit ist auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(\,\cos\,x\,)}{x} \;=\; 0$$

und damit ist

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\,(\,\cos\,x\,)\right) \;=\; \exp\,0 \;=\; 1.$$

Aufgabe 11. Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Lösung

a) Die Sinusfunktion hat an den angegebenen Stellen den Wert 0, daher ist

$$P \;=\; x(x+\pi)(x-\pi) \;=\; x(x^2-\pi^2) \;=\; x^3-\pi^2 x.$$

b) Es ist

$$f(0)=0,\; f'(0)=1,\; f(\pi)=0 \text{ und } f'(\pi)=-1\,.$$

Das gesuchte Polynom

$$Q(x) \;=\; ax^3+bx^2+cx+d$$

besitzt die Ableitung

$$Q'(x) \;=\; 3ax^2+2bx+c.$$

Somit müssen die Koeffizienten von Q die Bedingungen $d \;=\; 0$,

$$Q'(0) \;=\; c \;=\; 1,$$

$$a\pi^3+b\pi^2+\pi \;=\; 0,$$

also

$$a\pi^2+b\pi+1 \;=\; 0$$

und

$$3a\pi^2 + 2b\pi + 1 \;=\; -1$$

erfüllen. Die beiden zuletzt genannten Gleichungen liefern

$$b\pi + 2 \;=\; 1,$$

also

$$b \;=\; -\frac{1}{\pi}$$

und damit ist

$$a \;=\; 0.$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$Q \;=\; -\frac{1}{\pi}x^2 + x.$$

c) Das gesuchte Polynom R ist das Taylor-Polynom der Ordnung 3 zu f an der Stelle $\pi/2$. Die Ableitungen an dieser Stelle sind

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\; f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ und } f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

Das Taylor-Polynom der Ordnung 3 ist daher

$$1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \,.$$

Aufgabe 12. Finde den oder die Fehler im folgenden „Beweis“ für die Aussage, dass man zu zwei stetigen Funktionen

$$f, g \colon\; \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine Stammfunktion zu fg finden kann, indem man (geeignete) Stammfunktionen zu f und zu g miteinander multipliziert.

„Es sei F eine Stammfunktion zu f und G eine Stammfunktion zu g, die wir beide positiv wählen, was wegen der Positivität von f und g möglich ist. Für positive Zahlen ist der natürliche Logarithmus definiert, so dass man diese Funktionen mit dem Logarithmus verknüpfen kann. Dann ist $\ln F$ eine Stammfunktion von $\ln f$ und $\ln G$ eine Stammfunktion von $\ln g$. Nach der Additionsregel für Stammfunktionen ist somit $\ln F + \ln G$ eine Stammfunktion von $\ln f + \ln g$. Wir wenden auf diese Situation die Umkehrfunktion des Logarithmus, also die Exponentialfunktion an, und erhalten mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass

$$\exp(\ln F + \ln G) \;=\; \exp(\ln F) \cdot \exp(\ln G) \;=\; F \cdot G$$

eine Stammfunktion von

$$\exp(\ln f + \ln g) \;=\; \exp(\ln f) \cdot \exp(\ln g) \;=\; f \cdot g$$

ist.“

Lösung

Es gibt zwei Fehler: Wenn F eine Stammfunktion zu f ist, so muss $\ln F$ keine Stammfunktion zu $\ln f$ sein (dies wird für f und für g verwendet), und wenn H eine Stammfunktion zu h ist, so muss $\exp H$ keine Stammfunktion zu $\exp h$ sein (im falschen Beweis ist $h = \ln f + \ln g$).

Aufgabe 13. Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (es muss nicht gezeigt werden, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Innern des Intervalls angenommen wird).

Lösung

Aufgrund des Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewendet auf die Ableitung g', gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt = (b-a)g'(c).$$

Division durch $b - a$ liefert den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 14. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr .$$

Lösung

Mit der Substitution $r = \sin s$ ist

$$\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin s}{\cos s} \cos s \, ds = \int_0^{\pi/2} \sin s \, ds = (-\cos s)|_0^{\pi/2} = 1.$$

Aufgabe 15. Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x^4+1}$$

unter Verwendung der Zerlegung

$$x^4 + 1 = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right).$$

Lösung

Da das Polynom x^4+1 stets positiv ist, besitzt es keine Nullstelle und daher lässt sich die angegebene Faktorzerlegung nicht weiter in Linearfaktoren aufspalten. Aufgrund von Satz 26.4 gibt es also eine eindeutige Darstellung

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf

$$\begin{aligned} 1 &= (ax+b)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + (cx+d)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) \\ &= (a+c)\,x^3 + \left(b+d-a\sqrt{2}+c\sqrt{2}\right)x^2 + \left(a+c-b\sqrt{2}+d\sqrt{2}\right)x + b + d. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a+c=0,\ 1+\sqrt{2}\,(c-a)=0,\ \sqrt{2}(-b+d)=0 \text{ und } b+d=1\,.$$

Daraus folgt $a=-c=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ und $b=d=\frac{1}{2}$. Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Aufgabe 16. a) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein nullstellenfreies Vektorfeld, d.h. $f(t,y)\neq 0$ für alle $(t,y)\in\mathbb{R}^2$. Zeige, dass jede Lösungskurve zur Differentialgleichung

$$y' = f(t,y)$$

injektiv ist.

b) Sei f nun ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Zeige, dass f genau dann nullstellenfrei ist, wenn jede Lösungskurve injektiv ist.

c) Man gebe ein Beispiel für ein Vektorfeld, das nicht nullstellenfrei ist, für das aber jede Lösungskurve injektiv ist.

Lösung

a) Es sei angenommen, dass es eine nicht injektive Lösungskurve

$$y\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt. Dann gibt es Punkte $a,b\in I$, $a<b$ mit $y(a)=y(b)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $c\in]a,b[$ mit

$$y'(c) = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu

$$y'(c) = f(c,y(c)) \neq 0.$$

b) Die Hinrichtung folgt aus Teil a). Sei nun

$$f(t,y) = h(y)$$

nicht nullstellenfrei. Dann gibt es ein y_0 mit $h(y_0) = 0$. Für die konstante Funktion

$$y(t) := y_0$$

gilt

$$y'(t) = 0 = h(y_0) = f(t,y_0) = f(t,y(t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, so dass eine Lösung der Differentialgleichung vorliegt. Diese konstante Lösung ist nicht injektiv.

c) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = t^2$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f(t,y) = g(t) = t^2.$$

Bei $t = 0$ liegen Nullstellen vor. Die Lösungen sind die Stammfunktionen zu t^2, also $\frac{1}{3}t^3 + c$. Da dritte Wurzeln im Reellen eindeutig sind, handelt es sich um injektive Funktionen.