Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

9. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Urbild* zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ unter einer Abbildung $F\colon L \to M$.
(2) Eine *rationale Zahl*.
(3) Eine *wachsende* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper.
(4) Eine *stetige Fortsetzung* einer stetigen Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf eine Teilmenge $\tilde{T}$, $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \mathbb{K}$.
(5) Die *Exponentialfunktion zur Basis* $b > 0$ im Komplexen.
(6) Eine *konkave* Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(7) Das *Oberintegral* einer nach oben beschränkten Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Eine *ortsunabhängige* gewöhnliche Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,.$$

Lösung

(1) Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ heißt
$$F^{-1}(T) = \{x \in L \mid F(x) \in T\}$$
das Urbild von T unter F.
(2) Unter einer rationalen Zahl versteht man einen Ausdruck der Form
$$\frac{a}{b}\,,$$
wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ sind, und wobei zwei Ausdrücke $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn $ad = bc$ (in $\mathbb{Z}$) gilt.
(3) Die Folge heißt wachsend, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

(4) Eine Abbildung

$$\tilde{f}\colon \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt eine stetige Fortsetzung von f, wenn $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in T$ gilt.

(5) Die Exponentialfunktion zur Basis b von $z \in \mathbb{C}$ wird durch

$$b^z := \exp(z \ln b)$$

definiert.

(6) Die Funktion f heißt konkav, wenn ihr Subgraph eine konvexe Menge ist.

(7) Das Oberintegral ist definiert als das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f.

(8) *Ortsunabhängig* bedeutet, dass die Funktion f nicht von y abhängt.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

(2) Der *Zwischenwertsatz*.

(3) Der *Satz über die lineare Approximierbarkeit* einer Funktion

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

(4) Die *Taylor-Formel* für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ für einen inneren Punkt $a \in I$.

Lösung

(1) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.

(2) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.

(3) Die Funktion f ist in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{K}$ und eine Funktion

$$r\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)\,.$$

(4) Zu jedem Punkt $x \in I$ gibt es ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Aufgabe 3. Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Lösung

Es sei x der Gesamtnormalpreis. Mit BC25 hat man die Kosten

$$y = 62 + \frac{3}{4}x$$

und mit BC50 hat man die Kosten

$$z = 255 + \frac{1}{2}x\,.$$

Die Bedingung

$$x \leq 62 + \frac{3}{4}x$$

führt auf

$$x \leq 248\,.$$

Die Bedingung

$$x \leq 255 + \frac{1}{2}x$$

führt auf

$$x \leq 510\,.$$

Die Bedingung

$$62 + \frac{3}{4}x \leq 255 + \frac{1}{2}x$$

führt auf

$$\frac{1}{4}x \leq 255 - 62 = 193\,,$$

also

$$x \leq 772\,.$$

Also ist für $x \leq 248$ keine Bahncard die günstigste Option, für $248 \leq x \leq 772$ ist die BC25 die günstigste Option und für $x \geq 772$ ist die BC50 die günstigste Option.

Aufgabe 4. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist
$$6^2 + 7 = 43$$
ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist
$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$
wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Aufgabe 5. Entscheide, ob die Folge
$$x_n := \frac{3\,\sin^4\, n\, - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \,\cos\, n}$$
in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir erweitern den Bruch mit $1/n^3$ $(n \geq 1)$ und schreiben
$$\begin{aligned} \frac{3\,\sin^4\, n\, - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \,\cos\, n} &= \frac{3\frac{\sin^4\, n}{n^3} - 7\frac{n^3}{n^3} + 11\frac{n}{n^3}}{5\frac{n^3}{n^3} - 4\frac{n^2}{n^3} - \frac{\cos\, n}{n^3}} \\ &= \frac{3\frac{\sin^4\, n}{n^3} - 7 + 11\frac{1}{n^2}}{5 - 4\frac{1}{n} - \frac{\cos\, n}{n^3}} \end{aligned}$$
Dabei konvergieren $11\frac{1}{n^2}$ und $-4\frac{1}{n}$ gegen 0 und wegen $-1 \leq \,\sin\, n\,,\,\cos\, n\, \leq 1$ konvergieren auch $\frac{\sin^4\, n}{n^3}$ und $\frac{\cos\, n}{n^3}$ gegen 0. Somit konvergiert die Folge gegen $-\frac{7}{5}$.

Aufgabe 6. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die keine Nullfolge sei. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass entweder alle x_n, $n \geq N$, positiv oder negativ sind.

Lösung

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ mit $|x_n| > \epsilon$ gibt. Da es sich um eine Cauchy-Folge handelt, gibt es zu $\epsilon/2$ ein k derart, dass für alle $m, n \geq k$ die Abschätzung $|x_m - x_n| \leq \epsilon/2$ gilt. Sei nun $n \geq k$ so gewählt, dass $|x_n| > \epsilon$ ist.

Bei $x_n > 0$ gilt für alle $m \geq n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} x_m &= x_n + x_m - x_n \\ &\geq x_n - \frac{\epsilon}{2} \\ &\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

so dass für $m \geq n$ alle Folgenglieder positiv sind.

Bei $x_n < 0$ gilt für alle $m \geq n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} x_m &= x_n + x_m - x_n \\ &\leq x_n + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq -\epsilon + \frac{\epsilon}{2} \\ &= -\frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

so dass für $m \geq n$ alle Folgenglieder negativ sind.

Aufgabe 7. Es sei eine Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $|a_i| \leq 9^i$ für alle $i \in \mathbb{N}_+$ gegeben. Zeige, dass die Reihe absolut konvergiert.

Lösung

Für die Reihenglieder ist

$$\left|a_i 10^{-i}\right| \leq |a_i| \, 10^{-i} \leq 9^i 10^{-i} = \left(\frac{9}{10}\right)^i .$$

Man hat also die geometrische Reihe zu $\frac{9}{10}$ als konvergente Majorante und erhält die absolute Konvergenz der Reihe.

Aufgabe 8. Beweise den Zwischenwertsatz.

Lösung

Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0) .$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0 \,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$.

Aufgabe 9. Es sei

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0\,,$$

ein Polynom vom Grad 2. Zeige, dass der Durchschnitt des Graphen der Funktion mit jeder Tangenten an den Graphen aus genau einem Punkt besteht.

Lösung

Die Tangente zu $x_0 \in \mathbb{K}$ wird durch

$$t(x) \;=\; f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \;=\; f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

beschrieben. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehört zum Graphen und zur Tangente; wir müssen zeigen, dass kein weiterer Punkt zum Durchschnitt gehört. Nehmen wir an, es gäbe einen weiteren Punkt $x_1 \neq x_0$ mit $f(x_1) = t(x_1)$. Dies bedeutet

$$ax_1^2 + bx_1 + c \;=\; (2ax_0 + b)(x_1 - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Dies führt auf

$$a(x_1^2 - x_0^2) + b(x_1 - x_0) \;=\; (2ax_0 + b)(x_1 - x_0).$$

Division durch $x_1 - x_0 \neq 0$ ergibt

$$a(x_1 + x_0) + b \;=\; 2ax_0 + b$$

und daraus erhält man

$$ax_1 \;=\; ax_0.$$

Wegen $a \neq 0$ folgt der Widerspruch

$$x_1 \;=\; x_0.$$

Aufgabe 10. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

streng wachsend ist.

Lösung

Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} e^x \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2} e^x . \end{aligned}$$

Wegen $e^x > 0$ und $(x-1)^2 \geq 0$ und $(x-1)^2 > 0$ für $x \neq 1$ ist die Ableitung nichtnegativ und hat nur für $x = 1$ eine Nullstelle. Die Funktion ist also nach Satz 19.5 streng wachsend.

Aufgabe 11. Beweise den Satz über die lineare Approximation einer Funktion

$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.

Lösung

Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a,\, x \in \mathbb{K} \setminus \{a\}} r(x) \;=\; \lim_{x \rightarrow a,\, x \in \mathbb{K} \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist.

Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x)\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \rightarrow a$ existieren.

Aufgabe 12. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

eine Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(z+w) = f(z) \cdot f(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ erfülle und die in 0 differenzierbar sei. Zeige, dass dann f in jedem Punkt differenzierbar ist und die Beziehung $f'(z) = \lambda f(z)$ mit einem festen $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Lösung

Bei $f(0) = 0$ ist $f(z) = f(z+0) = f(z)f(0) = 0$, so dass die Nullfunktion vorliegt, die die angegebene Ableitungseigenschaft (mit einem beliebigen λ) erfüllt. Sei also $f(0) \neq 0$. Dann ist $f(0) = 1$ wegen $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(z)f(h) - f(z)}{h} = f(z)\frac{f(h) - 1}{h} = f(z)\frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Der rechte Faktor ist der Differenzenquotient im Nullpunkt. Dieser konvergiert nach Voraussetzung für $h \to 0$ gegen $f'(0)$. Also konvergiert der Differenzenquotient gegen $f(z)f'(0)$ und die Ableitungseigenschaft ist mit $\lambda = f'(0)$ erfüllt.

Aufgabe 13. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 1$$

definiert. Entscheide, für welche x_0 die Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^x - 1$. Es ist $f(0) = 0$. Die Ableitung der Funktion f ist e^x. Daher verläuft der Graph von f für $x > 0$ echt oberhalb der Diagonalen und für $x < 0$ echt unterhalb der Diagonalen. Insbesondere ist $f(x) \geq x$, wobei Gleichheit nur bei

$$x = 0$$

gilt. Insbesondere ist also die rekursiv definierte Folge wachsend. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt für den Grenzwert x einer solchen Folge (falls er existiert)

$$x = e^x - 1.$$

Diese Bedingung wird nur von $x = 0$ erfüllt und dies ist der einzige mögliche Grenzwert. Bei einem Startwert $x_0 > 0$ kann die Folge wegen dem Wachstumsverhalten nicht konvergieren. Bei einem Startwert $x_0 \leq 0$ ist

$$e^{x_0} - 1 \,\leq\, 0.$$

Daher ist eine solche Folge wachsend und nach oben beschränkt und muss somit konvergieren, und zwar gegen den einzig möglichen Grenzwert 0.

Aufgabe 14. Bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Lösung

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin^3 t \; dt &= \int_0^x \sin t \cdot \sin^2 t \; dt \\
&= \int_0^x \sin t \cdot \big(1 - \cos^2 t\big) \; dt \\
&= \int_0^x \sin t \; dt - \int_0^x (\sin t \, \cos t) \cos t \; dt \\
&= \int_0^x \sin t \; dt - \left(\frac{\sin^2 t}{2} \cos t \right) |_0^x - \frac{1}{2} \left(\int_0^x \sin^3 t \; dt \right).
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit 2 und Umstellen erhält man

$$\begin{aligned}
3 \int_0^x \sin^3 t \; dt &= 2 \int_0^x \sin t \; dt - \sin^2 x \, \cos x \\
&= -2 \cos x - \sin^2 x \, \cos x .
\end{aligned}$$

Also ist

$$-\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin^2 x \, \cos x$$

eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Aufgabe 15. a) Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ und es sei

$$f(x) = R(x, \sqrt[k]{x})$$

eine rationale Funktion in x und in $\sqrt[k]{x}$. Man gebe direkt (ohne Bezug auf Standardsubstitutionen der Vorlesung) eine geeignete Substitution an, mit der die Berechnung der Stammfunktion zu $f(x)$ auf die Berechnung einer Stammfunktion einer rationalen Funktion in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

b) Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion (mit $x > 1$)

$$\frac{\sqrt[3]{x} + x}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}} .$$

Lösung

a) Wir betrachten die Substitution $x = u^k$ bzw. $u = \sqrt[k]{x}$. Damit ist

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int R(x, \sqrt[k]{x})\,dx \;=\; \int R(u^k, u) \cdot k u^{k-1}\,du.$$

Dabei ist jetzt $R(u^k, u)$ eine rationale Funktion in u, und bei der Multiplikation mit ku^{k-1} bleibt dies eine rationale Funktion.

b) Mit der Substitution $x = u^3$ bzw. $u = \sqrt[3]{x}$ ist

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + x}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}}\,dx \;=\; \int \frac{u + u^3}{u^2 - u} \cdot 3u^2\,du \;=\; \int \frac{3u^2 + 3u^4}{u - 1}\,du.$$

Polynomdivision ergibt

$$u^4 + u^2 = (u - 1)(u^3 + u^2 + 2u + 2) + 2$$

und daher ist dieses Integral gleich

$$\int \frac{3u^2 + 3u^4}{u - 1}\,du \;=\; \int 3u^3 + 3u^2 + 6u + 6 + \frac{6}{u - 1}\,du.$$

Eine Stammfunktion ist daher

$$\frac{3}{4}u^4 + u^3 + 3u^2 + 6u + 6 \cdot \ln(u - 1)\,.$$

Somit ist

$$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + 3(\sqrt[3]{x})^2 + 6\sqrt[3]{x} + 6 \cdot \ln(\sqrt[3]{x} - 1)$$

eine Stammfunktion von $\frac{\sqrt[3]{x}+x}{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}}$.

Aufgabe 16. a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Lösung

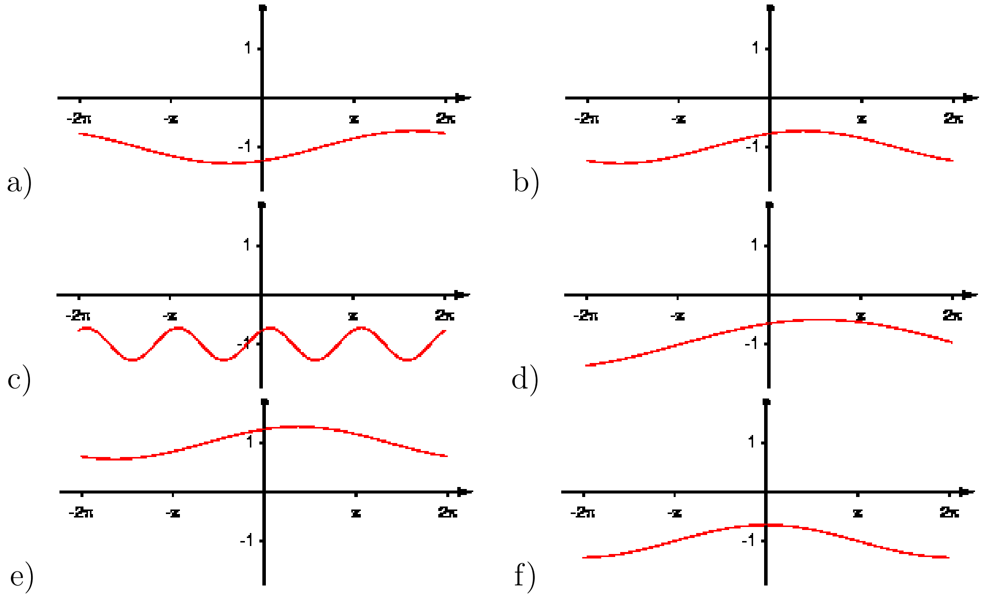
a) Nach dem Lösungsansatz für homogene lineare Differentialgleichungen müssen wir zuerst eine Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ bestimmen, eine solche ist $\ln t$. Die Exponentialfunktion davon ist t, so dass $y = ct$ (mit $c \in \mathbb{R}$) die Lösungen von $y' = y/t$ sind.

b) Eine Stammfunktion zu $\frac{t^7}{t} = t^6$ ist
$$\frac{1}{7}t^7\,.$$
Damit ist
$$\frac{1}{7}t^7 \cdot t = \frac{1}{7}t^8$$
eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und somit sind
$$\frac{1}{7}t^8 + ct,\ c \in \mathbb{R},$$
alle Lösungen.

c) Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung $y(1) = 5$ erfüllt sein soll, so muss
$$\frac{1}{7} + c = 5$$
gelten, also
$$c \,=\, 5 - \frac{1}{7} \,=\, \frac{34}{7}.$$
Die Lösungs des Anfangsproblems ist also
$$y(t) = \frac{1}{7}t^8 + \frac{34}{7}t\,.$$

Aufgabe 17. Ordne die folgenden Funktionen den Bildern zu (man schreibe ohne Begründung hinter den Funktionsausdruck den Buchstaben des zugehörigen Bildes; nur für vollständig richtige Antworten gibt es Punkte).

(1)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 1\,,$$
(2)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 1\,,$$
(3)
$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x + 1\right) - 1\,,$$
(4)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1\,,$$
(5)
$$\frac{1}{3}\sin\,(2x + 1) - 1\,,$$
(6)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\,.$$



Lösung

(1)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1:\ b\,,$$

(2)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1:\ a\,,$$

(3)
$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x+1\right)-1:\ d\,,$$

(4)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1:\ e\,,$$

(5)
$$\frac{1}{3}\sin\left(2x+1\right)-1:\ c\,,$$

(6)
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)-1:\ f\,.$$