Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

8. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	5	3	3	5	5	5	4	4	5	5	1	2	5	4	64
erhaltene Pkt.:																	

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Ordnungs*relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I.
(2) Eine *Cauchy-Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(3) Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
(4) Die *Abzählbarkeit* einer Menge M.
(5) Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in D$ einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Eine *konvexe Teilmenge* $T \subseteq \mathbb{R}^n$.
(7) Das *Unterintegral* einer nach unten beschränkten Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(8) Ein *Anfangswertproblem* auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ zu einer Funktion

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
(2) Der *Satz über die Interpolation durch Polynome.*
(3) Der *zweite Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.
(4) Der Satz über *partielle Integration.*

AUFGABE 3. (5 (3+2) Punkte)

Es seien $M_1,\ldots,M_k$ und $N_1,\ldots,N_k$ nichtleere Mengen und

$$\varphi_i\colon M_i \longrightarrow N_i$$

Abbildungen für $i = 1,\ldots,k$. Es sei $M = M_1 \times \cdots \times M_k$, $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, und φ die Produktabbildung, also

$$\varphi\colon M \longrightarrow N,\ (x_1,\ldots,x_k) \longmapsto (\varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_k(x_k)).$$

a) Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn alle φ_i surjektiv sind.

b) Zeige, dass a) nicht gelten muss, wenn die beteiligten Mengen leer sein dürfen.

AUFGABE 4. (3 Punkte)
Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

AUFGABE 5. (3 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

AUFGABE 6. (5 Punkte)
Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

AUFGABE 7. (5 Punkte)
Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1 .$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

AUFGABE 8. (5 Punkte)
Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Beweise die Kettenregel für die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ von zwei differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 13. (1 Punkt)

Besitzt die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp z,$$

eine differenzierbare Umkehrfunktion?

Aufgabe 14. (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 15. (5 Punkte)
Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)
Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2(t-1)}$$

für $t > 1$.