

## Analysis I

### 7. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Eine *surjektive* Abbildung

$$f: L \longrightarrow M.$$

- (2) Ein *archimedisch* angeordneter Körper  $K$ .  
(3) Ein *vollständig* angeordneter Körper  $K$ .  
(4) Der *Grenzwert* einer Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt  $a \in \mathbb{K}$  (dabei ist  $T \subseteq \mathbb{K}$  eine Teilmenge).

- (5) Der *Konvergenzradius* einer komplexen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

- (6) Die  $n$ -fache *Differenzierbarkeit* einer Funktion

$$f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

- (7) Das *Taylor-Polynom vom Grad  $n$*  zu einer  $n$ -mal differenzierbaren Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

im Entwicklungspunkt  $a \in \mathbb{C}$ .

- (8) Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem kompakten Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Lösung

- (1)  $f$  heißt surjektiv, wenn es für jedes  $y \in M$  mindestens ein Element  $x \in L$  mit  $f(x) = y$  gibt.  
(2) Ein angeordneter Körper  $K$  heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem  $x \in K$  eine natürliche Zahl  $n$  mit

$$n \geq x$$

gibt.

- (3) Ein angeordneter Körper  $K$  heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in  $K$  konvergiert.
- (4) Eine Zahl  $b \in \mathbb{K}$  heißt Grenzwert von  $f$  in  $a$ , wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$ , die gegen  $a$  konvergiert, die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $b$  konvergiert.
- (5) Unter dem Konvergenzradius der Potenzreihe versteht man

$$\sup \left( |b - a|, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (b - a)^n \text{ konvergiert} \right).$$

- (6) Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist, wenn  $f$   $(n - 1)$ -mal differenzierbar ist und die  $(n - 1)$ -te Ableitung  $f^{(n-1)}$  differenzierbar ist.
- (7) Das Polynom

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad  $n$  zu  $f$  im Entwicklungspunkt  $a$* .

- (8) Die Funktion  $f$  heißt Riemann-integrierbar auf  $I$ , wenn Ober- und Unterintegral von  $f$  existieren und übereinstimmen.

AUFGABE 2. Formuliere die folgenden Sätze.

- (1) Das *Quotientenkriterium* für eine komplexe Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .
- (2) Der *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit* einer Funktion

$$T \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei  $T \subseteq \mathbb{K}$  eine Teilmenge ist.

- (3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
- (4) Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion*.

Lösung

- (1) Es gebe eine reelle Zahl  $q$  mit  $0 \leq q < 1$  und ein  $k_0$  mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle  $k \geq k_0$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.

- (2) Es sei  $\bar{T}$  die Menge aller Berührungspunkte von  $T$  und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

sei gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}: \bar{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

(3) Sei  $a < b$  und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf  $]a, b[$  differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein  $c \in ]a, b[$  mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(4) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$  eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann ist

$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

AUFGABE 3. Ordne die Zahlen

$$\exp(0,6), \exp(0,7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

Lösung

Es ist einerseits

$$\begin{aligned} \exp(0,7) &\geq 1 + 0,7 + \frac{1}{2} \cdot 0,7^2 + \frac{1}{6} \cdot 0,7^3 \\ &= 1,7 + 0,245 + \frac{1}{6} \cdot 0,343 \\ &> 1,945 + 0,057 \\ &= 2,002 \\ &> 2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \exp(0,6) &\leq 1 + 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 0,6^2 + \frac{1}{6} (0,6^3 + 0,6^4 + \dots) \\ &= 1,6 + 0,18 + \frac{1}{6} \cdot 0,6^3 (1 + 0,6 + 0,6^2 + \dots) \\ &= 1,78 + \frac{1}{6} \cdot 0,6^3 \cdot \frac{5}{2} \\ &= 1,78 + \frac{3^3 \cdot 5}{6 \cdot 5^3 \cdot 2} \\ &= 1,78 + \frac{9}{100} \\ &= 1,87 \\ &< 2, \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die geometrische Reihe verwendet haben. Daher ist

$$\exp(0,6) < 2 < \exp(0,7).$$

AUFGABE 4. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  drei Folgen in  $K$ . Es gelte  $x_n \leq y_n \leq z_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert  $a$ . Zeige, dass dann auch  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen diesen Grenzwert  $a$  konvergiert.

Lösung

Es ist

$$x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a.$$

Bei  $y_n - a \geq 0$  ist somit

$$|y_n - a| \leq |z_n - a|$$

und bei  $y_n - a \leq 0$  ist

$$|y_n - a| \leq |x_n - a|.$$

Daher ist stets

$$|y_n - a| \leq \min(|x_n - a|, |z_n - a|).$$

Für ein vorgegebenes  $\epsilon > 0$  gibt es aufgrund der Konvergenz der beiden äußeren Folgen gegen  $a$  natürliche Zahlen  $n_1$  und  $n_2$  derart, dass

$$|x_n - a| \leq \epsilon$$

für  $n \geq n_1$  und

$$|z_n - a| \leq \epsilon$$

für  $n \geq n_2$  gilt. Für  $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$  gilt daher

$$|y_n - a| \leq \epsilon.$$

Dies bedeutet die Konvergenz von  $y_n$  gegen  $a$ .

AUFGABE 5. Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Lösung

Für  $n \geq 2$  ist

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n^{n-2}} \cdot \frac{2 \cdot 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Da die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor und damit konvergiert die angegebene Reihe.

AUFGABE 6. Sei  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ . Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit  $f(az) = f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gelte. Zeige, dass  $f$  konstant ist.

Lösung

Unter der gegebenen Voraussetzung konvergiert die Folge  $a^n$  gegen 0. Daher konvergiert auch für jedes feste  $z \in \mathbb{C}$  die Folge  $a^n z$  gegen 0. Durch iterative Anwendung der Voraussetzung an  $f$  erhält man

$$f(z) = f(az) = f(a^2z) = \dots = f(a^n z)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $f$  ist also

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n z) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^n z\right) = f(0).$$

Somit ist  $f(0)$  der einzige Wert der Funktion.

AUFGABE 7. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die  $n$ -te Ableitung ( $n \geq 1$ ) von  $f$  gleich

$$f^{(n)}(x) = (3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n) e^{3x}$$

ist.

Lösung

Die Ableitung von  $f$  ist nach der Produktregel

$$f'(x) = 2e^{3x} + 2x \cdot 3e^{3x} = (3^1 \cdot 2x + 2) e^{3x} = (3^1 \cdot 2x + 3^0 \cdot 2 \cdot 1) e^{3x}.$$

Dadurch ist die Gleichung für  $n = 1$  richtig und der Induktionsanfang ist gesichert. Sei die Gleichung nun für die  $n$ -te Ableitung schon bewiesen. Wegen  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$  gilt somit

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left( (3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n) e^{3x} \right)' \\ &= 3^n \cdot 2e^{3x} + 3 (3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n) e^{3x} \\ &= (3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2 + 3^n \cdot 2n) e^{3x} \\ &= (3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2(n+1)) e^{3x}. \end{aligned}$$

Daher ist die Gleichung auch für die  $(n+1)$ -te Ableitung richtig.

AUFGABE 8. Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt  $(0,0)$  und Radius  $r$  und ein  $s > r$  gegeben. Für welches  $x \in \mathbb{R}$  verläuft die Tangente zu  $x$  an den oberen Kreisbogen durch den Punkt  $(s,0)$ ?

Lösung

Der obere Kreisbogen wird (für  $x \in [-r, r]$ ) durch die Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

beschrieben. Die Ableitung davon ist

$$f'(x) = -x \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Die Steigung der Geraden durch  $(x, f(x))$  und  $(s, 0)$  wird durch

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

beschrieben. Dies führt auf die Bedingung

$$-x \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

bzw. auf

$$-x(x - s) = r^2 - x^2.$$

Daher ist

$$x = \frac{r^2}{s}.$$

AUFGABE 9. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Regel von Hospital. Die Ableitung der Zählerfunktion ist

$$(x - 1)' = 1$$

und die Ableitung der Nennerfunktion ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Die Funktion  $\frac{1}{x}$  hat keine Nullstelle in einer offenen Umgebung von 1. Daher ist Hospital anwendbar und es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1.$$

AUFGABE 10. Wir betrachten die durch

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

definierte Folge ( $n \geq 1$ ). Zeige folgende Aussagen.

- (1) Für  $n \geq 3$  ist die Folge monoton fallend.
- (2) Die Folge konvergiert gegen 1.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &= n^{\frac{1}{n}} \\ &= (e^{\ln n})^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}}.\end{aligned}$$

1. Wir erlauben auch reelle Argumente, d.h. wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^{\frac{\ln x}{x}},$$

und zeigen, dass diese Funktion für  $x \geq 3$  fallend ist; dies gilt dann insbesondere für die natürlichen Zahlen  $n \geq 3$ . Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, genügt es zu zeigen, dass

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\ln x}{x},$$

für  $x \geq 3$  fallend ist. Dazu ziehen wir Satz 19.5 heran und betrachten die Ableitung der differenzierbaren Funktion  $g$ . Diese ist

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2}.\end{aligned}$$

Für  $x \geq 3 > e$  ist  $\ln x \geq 1$  und somit ist der Zähler negativ, also ist die Funktion negativ.

2. Wir zeigen, dass  $\frac{\ln n}{n}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert. Wegen der Monotonie aus Teil 1 kann man statt  $n$  auch  $e^k$  einsetzen, was zur Folge  $\frac{k}{e^k}$  führt. Für diese Folge gilt

$$\begin{aligned}\frac{k}{e^k} &\leq \frac{k}{1 + k + \frac{1}{2}k^2} \\ &= \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ihr Grenzwert ist nach dem Quetschkriterium also 0. Da die Exponentialfunktion stetig ist, konvergiert somit  $e^{\frac{\ln n}{n}}$  gegen  $e^0 = 1$ .

AUFGABE 11. Der Graph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

und die  $x$ -Achse begrenzen eine Fläche. Bestimme die Gerade durch den Nullpunkt, die diese Fläche in zwei gleich große Teile unterteilt.

Lösung

Es ist

$$-x^2 + 5x = -x(x - 5),$$

die Fläche befindet sich also oberhalb des Intervalls  $[0, 5]$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x)dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 \\ &= -\frac{1}{3}125 + \frac{5}{2}25 \\ &= \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

Die Gerade durch den Nullpunkt setzen wir als  $y = ax$  an. Der Durchstoßungspunkt (abgesehen vom Nullpunkt) mit dem Graphen ergibt sich aus

$$ax = -x^2 + 5x$$

zu

$$x = 5 - a.$$

Die obere Fläche besitzt den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \int_0^{5-a} -x^2 + 5x - ax dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5-a}{2}x^2\right]_0^{5-a} \\ &= (5-a)^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (5-a)^3 \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Die Bedingung

$$(5-a)^3 \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{6}$$

führt auf

$$(5-a)^3 = \frac{125}{2}$$

und damit auf

$$5-a = \sqrt[3]{\frac{125}{2}}.$$

Also ist

$$a = 5 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right).$$

**AUFGABE 12.** Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung

Da der Grad des Zählerpolynoms größer als der Grad des Nennerpolynoms ist, führen wir zuerst eine Polynomdivision durch. Diese ergibt

$$5x^3 + 4x - 3 = (x^2 + 1)(5x) - x - 3$$

und daher ist

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1} = 5x - \frac{x}{x^2 + 1} - 3\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Eine Stammfunktion ist also

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - 3\arctan x.$$

AUFGABE 13. Sei  $I$  ein reelles Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei  $a \in I$  und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann  $F$  differenzierbar ist und dass

$$F'(x) = f(x)$$

für alle  $x \in I$  gilt.

Lösung

Es sei  $x$  fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für  $h \rightarrow 0$  der Limes existiert und gleich  $f(x)$  ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h} \left( \int_x^{x+h} f(t) dt - hf(x) \right)$$

für  $h \rightarrow 0$  gleich 0 ist. Mit der durch  $f(x)$  gegebenen konstanten Funktion können wir  $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x) dt$  schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion  $f(t) - f(x)$  betrachten, können wir annehmen, dass  $f(x) = 0$  ist. Wegen der Stetigkeit von  $f$  gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$

ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $t \in [x - \delta, x + \delta]$  die Abschätzung  $|f(t)| \leq \epsilon$  gilt. Damit gilt für  $h \in [-\delta, +\delta]$  nach Lemma 23.15 die Abschätzung

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} \epsilon dt \right| = |h| \epsilon$$

und daher

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \epsilon.$$

AUFGABE 14. Sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zeige  $f = 0$ .

Lösung

Nehmen wir an, dass  $f$  nicht die Nullfunktion ist. Dann gibt es einen Punkt  $c \in [a, b]$  mit  $f(c) \neq 0$ . Sagen wir  $f(c) > 0$ . Da  $f$  stetig ist, gibt es ein Teilintervall  $J = [d, e] \subseteq [a, b]$  mit  $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$  für alle  $x \in J$ . Die Funktion  $g$  sei außerhalb von  $J$  die Nullfunktion und auf  $J$  durch

$$g(x) = -(x - d)(x - e)$$

definiert. Die Funktion  $g$  ist stetig auf  $[a, b]$  und im Innern von  $[d, e]$  positiv, also insgesamt nichtnegativ. Daher gibt es ein weiteres Teilintervall  $J' = [s, t] \subseteq J$  derart, dass  $g(x) \geq \frac{g(\frac{d+e}{2})}{2}$  für alle  $x \in J'$  ist. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_d^e f(x)g(x)dx \\ &\geq \int_s^t f(x)g(x)dx \\ &\geq (t - s) \frac{f(c)}{2} \frac{g(\frac{d+e}{2})}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

AUFGABE 15. Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit  $t > 1$  und  $y < 0$ .

Lösung

Es liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor. Wir setzen

$$h(y) = \frac{1}{y^2},$$

davon ist

$$H(y) = -y^{-1}$$

eine Stammfunktion. Die Umkehrfunktion davon ist ebenfalls

$$H^{-1}(u) = -u^{-1}.$$

Wir setzen weiter  $g(t) = \frac{t}{t^2-1}$ . Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{t}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$t = a(t+1) + b(t-1)$$

und daraus

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t-1)$$

eine Stammfunktion von  $g(t)$ . Daher ist

$$y(t) = \frac{-2}{\ln(t-1) + \ln(t+1)}$$

eine Lösung, die für  $t > 1$  definiert ist und für die  $y(t) < 0$  gilt.