Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

7. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	4	2	4	3	3	2	8	4	3	8	6	5	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *surjektive* Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M.$$
(2) Ein *archimedisch* angeordneter Körper K.
(3) Ein *vollständig* angeordneter Körper K.
(4) Der *Grenzwert* einer Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ (dabei ist $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge).
(5) Der *Konvergenzradius* einer komplexen Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \,.$$
(6) Die n-fache *Differenzierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}.$$
(7) Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.
(8) Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Quotientenkriterium* für eine komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
(2) Der *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit* einer Funktion
$$T \longrightarrow \mathbb{K},$$
wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.
(3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*
(4) Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion.*

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Ordne die Zahlen
$$\exp(0,6)\,,\ \exp(0,7)\ \text{ und } 2$$
gemäß ihrer Größe.

AUFGABE 4. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

AUFGABE 5. (2 Punkte)

Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

AUFGABE 6. (4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(az) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass f konstant ist.

AUFGABE 7. (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung $(n \geq 1)$ von f gleich

$$f^{(n)}(x) \;=\; \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right) e^{3x}$$

ist.

AUFGABE 8. (3 Punkte)

Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r und ein $s > r$ gegeben. Für welches $x \in \mathbb{R}$ verläuft die Tangente zu x an den oberen Kreisbogen durch den Punkt $(s,0)$?

AUFGABE 9. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}\,.$$

Aufgabe 10. (8 (5+3) Punkte)
Wir betrachten die durch

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

definierte Folge ($n \geq 1$). Zeige folgende Aussagen.

(1) Für $n \geq 3$ ist die Folge monoton fallend.
(2) Die Folge konvergiert gegen 1.

Aufgabe 11. (4 Punkte)
Der Graph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Bestimme die Gerade durch den Nullpunkt, die diese Fläche in zwei gleich große Teile unterteilt.

Aufgabe 12. (3 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 13. (8 Punkte)
Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 14. (6 Punkte)
Sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige $f = 0$.

Aufgabe 15. (5 Punkte)

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.