Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

6. Beispielklausur mit Lösungen

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Relation* zwischen den Mengen X und Y.
(2) Der *Betrag* eines Elementes x in einem angeordneten Körper K.
(3) Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
(4) Die Funktion
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$
($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) *nimmt* in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum an.*
(5) Die *Summierbarkeit* einer Familie a_i, $i \in I$, komplexer Zahlen.
(6) Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).
(7) Die *Taylor-Reihe* zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion
$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{K}$ in einem Punkt $a \in U$.
(8) Die *Zeitunabhängigkeit* einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t,y)\,.$$

Lösung

(1) Eine Relation zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$.
(2) Der *Betrag* von x ist folgendermaßen definiert.
$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$
(3) Der Grad eines von 0 verschiedenen Polynoms
$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$
mit $a_n \neq 0$ ist n.
(4) Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein lokales Maximum besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung
$$f(x) \geq f(x')$$
gilt.

(5) Die Familie a_i, $i \in I$, heißt *summierbar*, wenn es ein $s \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ derart, dass für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq I$ mit $E_0 \subseteq E$ die Beziehung
$$|a_E - s| \leq \epsilon$$
gilt. Dabei ist $a_E = \sum_{i \in E} a_i$.

(6) Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch
$$\pi := 2s\,.$$

(7) Die Taylor-Reihe zu f im Entwicklungspunkt a ist
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,.$$

(8) Die gewöhnliche Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)$$
heißt zeitunabhängig, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ gilt mit einer Funktion h in der einen Variablen y.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
(2) Der *Satz über die Interpolation durch Polynome.*
(3) Der *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit* einer Funktion
$$T \longrightarrow \mathbb{K},$$
wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.
(4) Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

Lösung

(1) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.
(2) Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.
(3) Es sei $\overline{T}$ die Menge aller Berührpunkte von T und
$$f \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
sei gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung
$$\tilde{f} \colon \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

(4) Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; f(c)(b-a).$$

Aufgabe 3. a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a,b,c \in]0,1[$ mit

$$a^2+b^2=c^2\,.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a,b,c \in]0,1[$ mit

$$a^2+b^2 \neq c^2\,.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a,b \in]0,1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0,1[$ mit

$$a^2+b^2=c^2\,.$$

Lösung

a) Es ist

$$3^2+4^2=5^2\,,$$

daher ist

$$\left(\frac{3}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2 \;=\; \left(\frac{5}{6}\right)^2,$$

und diese Zahlen sind rational und aus dem offenen Einheitsintervall.

b) Wir nehmen $a=\frac{3}{6}$ und $b=\frac{4}{6}$ und $c=\frac{1}{6}$. Die Summe ist

$$a^2+b^2 \;=\; \left(\frac{5}{6}\right)^2 \;\neq\; \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

c) Wir setzen

$$a \;=\; b \;=\; \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

diese Zahl ist irrational, da $\sqrt{2}$ irrational ist. Dafür gilt

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \;=\; \frac{1}{4\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2} \;=\; \frac{1}{4} \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Mit $c=\frac{1}{2}$ ist also ein Beispiel der gewünschten Art gefunden.

Aufgabe 4. Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Lösung

Induktionsanfang. Für $n = 1$ kommt links nur der Summand zu $k = 1$ vor, und dieser ist

$$(-1)^0 1^2 = 1\,.$$

Rechts steht ebenfalls

$$(-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,.$$

Induktionsschluss. Die Aussage sei für n bewiesen, wir erschließen daraus auf die Gültigkeit für $n + 1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^n (n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)(n+1) \\
&= (-1)^{n+2} \frac{-n(n+1) + 2(n+1)(n+1)}{2} \\
&= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(-n+2n+2)}{2} \\
&= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für alle n.

Aufgabe 5. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Lösung

Wir wenden das Quotientenkriterium an, woraus dann die absolute Konvergenz folgt. Dazu betrachten wir den Quotienten aus zwei aufeinander folgenden Gliedern $a_n = \frac{z^n}{n^n}$ der Reihe (bei $z = 0$ ist die Aussage klar, sei also $z \neq 0$), also

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{z^n}{n^n}} \right| \\
&= |z| \, \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= |z| \, (\frac{n}{n+1})^n \frac{1}{n+1} \\
&\leq |z| \, \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Zu einem gegebene $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$q := \frac{|z|}{n_0 + 1} < 1\,.$$

Dies gilt dann auch für alle $n \geq n_0$, so dass man ab n_0 das Quotientenkriterium anwenden kann.

Aufgabe 6. Beweise den Satz über die stetige Fortsetzbarkeit einer Funktion $T \longrightarrow \mathbb{K}$, wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.

Lösung

Aufgrund von Satz 14.4 genügt es zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ für jedes $a \in \overline{T} \setminus T$ existiert. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in T, die gegen a konvergiert. Wir zeigen, dass dann auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Da diese Bildfolge in $\mathbb{K}$ ist, und $\mathbb{K}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Cauchy-Folge vorliegt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ ist für alle $x, x' \in T$ mit

$$d(x, x') \leq \delta.$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein n_0 mit $d(x_n, a) \leq \delta/2$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt daher $d(x_n, x_m) \leq \delta$ und somit insgesamt

$$d(f(x_n), f(x_m)) \leq \epsilon.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass für jede gegen a konvergente Folge der Grenzwert der Bildfolge gleich ist. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man für zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ betrachtet, die ebenfalls gegen a konvergiert, und für die der Limes der Bildfolge mit den Limiten der Teilbildfolgen übereinstimmt.

Aufgabe 7. Sei T eine Menge und seien

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

Lösung

Es seien f bzw. g die Grenzfunktionen der beiden Funktionenfolgen. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\frac{\epsilon}{2}$ gibt es aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von

f_n gegen f ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in T$ die Abschätzung

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Ebenso gilt für $n \geq n_1$ und $x \in T$ die Abschätzung

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Für $n \geq \max(n_0, n_1)$ gilt daher für alle $x \in T$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - f_n(x) - g_n(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Daher konvergiert die Funktionenfolge $f_n + g_n$ gleichmäßig gegen $f + g$.

Aufgabe 8. Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Lösung

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x).$$

Nach den Voraussetzungen ist h differenzierbar, es ist $h(a) \geq 0$ und es ist $h'(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$. Wir müssen zeigen, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$ ist. Nehmen wir also an, dass es ein $x > a$ gibt mit $h(x) < 0$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es ein $c \in [a, x]$ mit

$$h'(c) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a}\,.$$

Da diese Zahl negativ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Aufgabe 9. Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Lösung

a) Die Funktion f ist differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,.$$

Für $x > 0$ sind diese beiden Summanden positiv, so dass die Ableitung stets positiv ist und f daher streng wachsend ist. Daher ist die Abbildung injektiv. Die Funktion ist stetig, da sie differenzierbar ist. Daher genügt es für die Surjektivität, aufgrund des Zwischenwertsatzes, nachzuweisen, dass beliebig große und beliebig kleine Werte angenommen werden.

Für $0 < x < 1$ ist $1 - \frac{1}{x} < 0$ und daher

$$f(x) \leq \ln x\,.$$

Da der Logarithmus für $x \to 0$ beliebig kleine Werte annimmt, gilt das auch für f.

Für $x > 1$ ist $1 - \frac{1}{x} > 0$ und daher

$$f(x) \geq \ln x\,.$$

Da der Logarithmus für $x \to \infty$ beliebig große Werte annimmt, gilt das auch für f.

b) Durch Einsetzen ergibt sich $f(1) = 0$, also ist $u = 1$ das Urbild von 0. Aufgrund der Berechnung der Ableitung oben ist

$$f'(1) = 2\,.$$

Aufgrund der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt daher

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 10. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z-w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

Lösung

Es ist

$$t(z) \;=\; f'(w)z + f(w) - f'(w)w \;=\; f'(w)(z-w) + f(w).$$

Wir schreiben

$$f(z) \;=\; a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \;=\; \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$$

mit $a_d \neq 0$. Somit ist

$$f'(z) \;=\; d a_d z^{d-1} + (d-1) a_{d-1} z^{d-2} + \cdots + a_1 \;=\; \sum_{i=1}^{d} i a_i z^{i-1}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
f(z) - t(z) &= f(z) - f(w) - f'(w)(z-w) \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i z^i - \sum_{i=0}^{d} a_i w^i - f'(w)(z-w) \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_i (z^i - w^i) - f'(w)(z-w) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i (z-w) \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - f'(w)(z-w) \\
&= (z-w) \left(\sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - f'(w) \right).
\end{aligned}$$

Für den rechten Faktor gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - f'(w) &= \sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} \right) - \sum_{i=1}^{d} i a_i w^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} - i w^{i-1} \right).
\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden (ohne die Koeffizienten a_i) haben die Form

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i-1} z^j w^{i-1-j} - i w^{i-1} &= \sum_{j=0}^{i-1} \left(z^j w^{i-1-j} - w^{i-1} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} \left(z^j w^{i-1-j} - w^{i-1} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} w^{i-1-j} \left(z^j - w^j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} w^{i-1-j} (z-w) \left(\sum_{k=0}^{j-1} w^k z^{j-1-k} \right).
\end{aligned}$$

Hier kann man also nochmal einen Faktor $z - w$ ausklammern.

Aufgabe 11. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Lösung

Es ist

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Es ist

$$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$$

und daher ist

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 1\,.$$

Es ist

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \cdot \sin x = 2 \cos x - x \cdot \sin x$$

und daher ist

$$f''(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Es ist

$$f'''(x) = -2 \sin x - \sin x - x \cdot \cos x = -3 \sin x - x \cdot \cos x$$

und daher ist

$$f'''(\frac{\pi}{2}) = -3\,.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 3 in $\frac{\pi}{2}$ ist somit

$$\frac{\pi}{2} + (x - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{3}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3\,.$$

Aufgabe 12. Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe 13. Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Lösung

Eine Stammfunktion zu f ist

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln(2x+3) + e^{-x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x)\,dx &= F(4) - F(1) \\ &= \frac{16}{3} - 4 + \frac{1}{2}\ln 11 + e^{-4} - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - e^{-1} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{11}{5} + e^{-4} - e^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 14. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sinh t}$$

für $t > 0$.

Lösung

Es ist

$$\frac{1}{\sinh t} = \frac{2}{e^t - e^{-t}}.$$

Mit der Substitution $t = \ln s$ müssen wir eine Stammfunktion für

$$\frac{2}{s - s^{-1}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s^2-1} = \frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

finden. Eine solche ist

$$\ln(s-1) - \ln(s+1).$$

Daher ist

$$\ln(e^t - 1) - \ln(e^t + 1)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sinh t}$.

Aufgabe 15. a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y.$$

b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y + t^2.$$

Lösung

a) Eine Stammfunktion von $\frac{2t}{t^2+1}$ ist

$$\ln \left(t^2+1\right) ,$$

daher ist

$$e^{\ln \left(t^2+1\right)} = t^2+1$$

eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

b) Wir bestimmen gemäß dem Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{t^2+1} = \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}.$$

Eine solche ist

$$t - \arctan t .$$

Daher ist

$$(t - \arctan t) \left(t^2+1\right) = t^3 + t - t^2 \arctan t - \arctan t$$

eine Lösung der Differentialgleichung.