Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

6. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	4	4	7	3	4	6	6	4	5	3	3	3	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Relation* zwischen den Mengen X und Y.
(2) Der *Betrag* eines Elementes x in einem angeordneten Körper K.
(3) Der *Grad* eines Polynoms $P \in K[X]$, $P \neq 0$, über einem Körper K.
(4) Die Funktion

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

($D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge) *nimmt* in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum an.*
(5) Die *Summierbarkeit* einer Familie a_i, $i \in I$, komplexer Zahlen.
(6) Die Zahl π (gefragt ist nach der analytischen Definition).
(7) Die *Taylor-Reihe* zu einer unendlich oft differenzierbaren Funktion

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$

auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{K}$ in einem Punkt $a \in U$.
(8) Die *Zeitunabhängigkeit* einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)\,.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
(2) Der *Satz über die Interpolation durch Polynome.*
(3) Der *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit* einer Funktion

$$T \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.
(4) Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2\,.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 \neq c^2\,.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0, 1[$ mit

$$a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} .$$

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 6. (7 Punkte)

Beweise den Satz über die stetige Fortsetzbarkeit einer Funktion $T \longrightarrow \mathbb{K}$, wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei T eine Menge und seien

$$f_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

und

$$g_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

zwei gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen. Zeige, dass auch die Summenfolge

$$f_n + g_n \colon T \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f_n(t) + g_n(t),$$

gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a .$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt} .$$

AUFGABE 9. (6 (4+2) Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

AUFGABE 10. (6 Punkte)
Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

ein Polynom vom Grad $d \geq 2$, $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $t(z)$ die Tangente an f im Punkt w. Zeige die Beziehung

$$f(z) - t(z) = (z-w)^2 g(z)$$

mit einem Polynom $g(z)$ vom Grad $d-2$.

AUFGABE 11. (4 Punkte)
Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

AUFGABE 12. (5 Punkte)
Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

AUFGABE 13. (3 Punkte)
Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1,4]$.

AUFGABE 14. (3 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sinh t}$$

für $t > 0$.

Aufgabe 15. (3 (1+2) Punkte)

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1}y.$$

b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1}y + t^2.$$