Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

5. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *Umkehrabbildung* zu einer bijektiven Abbildung $F\colon L \to M$.
(2) Eine *Ordnungs*relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I.
(3) Die *bestimmte Divergenz* gegen $+\infty$ einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(4) Der *Polynomring* über einem Körper K (einschließlich der darauf definierten Operationen).
(5) Die *reelle Exponentialfunktion* zur Basis $b > 0$.
(6) Die *punktweise Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$
wobei T eine Menge ist.
(7) Die *Obersumme* zu einer oberen Treppenfunktion t zu einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Die *Lösung* zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t,y)\,,$$
wobei
$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,y) \longmapsto f(t,y),$$
eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.

Lösung

(1) Die Abbildung
$$G\colon M \longrightarrow L,$$
die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, heißt die *Umkehrabbildung* zu F.
(2) Die Relation $\preccurlyeq$ heißt *Ordnungsrelation*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.
   (a) Es ist $i \preccurlyeq i$ für alle $i \in I$.
   (b) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq k$ folgt stets $i \preccurlyeq k$.
   (c) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq i$ folgt $i = j$.

(3) Die Folge heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit
$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N\,.$$
(4) Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen
$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$
mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$
definiert ist.
(5) Die Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$
heißt Exponentialfunktion zur Basis b.
(6) Man sagt, dass die Funktionenfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge
$$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$
in $\mathbb{K}$ konvergiert.
(7) Zu einer oberen Treppenfunktion
$$t\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$
von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral
$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$
eine *Obersumme* von f auf I.
(8) Unter einer Lösung der Differentialgleichung versteht man eine Funktion
$$y\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto y(t),$$
auf einem mehrpunktigen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften erfüllt.
  (a) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
  (b) Die Funktion y ist differenzierbar.
  (c) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(2) Die *Funktionalgleichung* der komplexen Exponentialfunktion.
(3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
(4) Die *Quotientenregel* für die Ableitung, also die Formel für die Ableitung von $\frac{f}{g}$ (mit den Voraussetzungen an f und g).

Lösung

(1) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gelte

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

(2) Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w.$$

(3) Sei $a < b$ und sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(4) Es sei $D \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Menge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen, die beide in a differenzierbar seien und wobei g keine Nullstelle in D besitze. Dann ist f/g differenzierbar in a mit

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Aufgabe 3. Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Lösung

Wir nehmen an, dass es eine surjektive Abbildung

$$F\colon M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto F(x),$$

gibt, und müssen dies zu einem Widerspruch führen. Dazu betrachten wir

$$T = \{x \in M \mid x \notin F(x)\}.$$

Da dies eine Teilmenge von M ist, muss es wegen der Surjektivität ein $y \in M$ geben mit

$$F(y) = T.$$

Es gibt nun zwei Fälle, nämlich $y \in F(y)$ oder $y \notin F(y)$. Im ersten Fall ist also $y \in T$, und damit, nach der Definition von T, auch $y \notin F(y)$, Widerspruch. Im zweiten Fall ist, wieder aufgrund der Definition von T, $y \in T$, und das ist ebenfalls ein Widerspruch.

AUFGABE 4. Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Lösung

Induktionsanfang für $n = 10$. Es ist

$$3^{10} \;=\; 9^5 \;=\; 81 \cdot 81 \cdot 9 \;\geq\; 6000 \cdot 9 \;\geq\; 10000 \;=\; n^4 .$$

Zum Induktionsschluss sei $n \geq 10$. Dann ist

$$3^{n+1} \;=\; 3 \cdot 3^n \;\geq\; 3 \cdot n^4 \;=\; n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 .$$

Andererseits ist nach der binomischen Formel

$$(n+1)^4 \;=\; n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 .$$

Wir müssen

$$n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^4 \;\geq\; n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

nachweisen. Der erste Summand stimmt links und rechts überein, für die anderen Summanden zeigen wir, dass die linken, also jeweils $\frac{1}{2}n^4$, mindestens so groß wie die rechten sind. Dies folgt aber direkt aus $n^4 \geq 8n^3$ (da $n \geq 10$), aus $n^4 \geq 12n^2$, da ja $n^2 \geq 12$ ist, aus $n^4 \geq 8n$ und aus $n^4 \geq 2$.

AUFGABE 5. Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n \;=\; \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir erweitern mit $n^{-\frac{7}{5}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1} \\ &= \frac{3n^{\frac{5}{4}-\frac{7}{5}} - 2n^{\frac{4}{3}-\frac{7}{5}} + n^{1-\frac{7}{5}}}{4n^{\frac{7}{5}-\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}-\frac{7}{5}} + n^{-\frac{7}{5}}} \\ &= \frac{3n^{-\frac{8}{20}} - 2n^{-\frac{1}{15}} + n^{-\frac{2}{5}}}{4 + 5n^{-\frac{9}{10}} + n^{-\frac{7}{5}}} . \end{aligned}$$

Folgen der Form n^{-q}, $q \in \mathbb{Q}_+$, konvergieren gegen 0, nach den Rechengesetzen für konvergente Folgen konvergiert diese Folge also gegen 0.

Aufgabe 6. Für ein Mathematikbuch soll der Graph der Exponentialfunktion über dem Intervall $[-5,3]$ maßstabsgetreu in cm gezeichnet werden, wobei der Fehler maximal $0,001$ cm sein darf. Es steht nur ein Zeichenprogramm zur Verfügung, das lediglich Polynom zeichnen kann. Welches Polynom kann man nehmen?

Lösung

Wir betrachten zur Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ die Teilpolynome

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}.$$

Die Differenz der Exponentialfunktion zu diesen Polynomen ist somit

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

und der Betrag davon soll für jedes $x \in [-5,3]$ maximal gleich $0,001$ sein. Wegen

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

müssen wir k so wählen, dass

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \leq 0,001 = \frac{1}{1000}$$

ist. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} &= \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1+j)!} 5^j \right) \\
&= \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{5^j}{(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j)} \right) \\
&\leq \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{5}{k+2} \right)^j \right).
\end{aligned}$$

Bei

$$5 < k+2$$

liegt rechts eine geometrische Reihe vor, bei $k \geq 8$ ist deren Wert maximal gleich 2. Bei $k \geq 10$ (bzw. ≥ 13) können wir grob abschätzen

$$\begin{aligned}
\frac{5^{k+1}}{(k+1)!} &= \frac{5}{k+1} \cdot \frac{5}{k} \cdots \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdots \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{5}{1} \\
&\leq \frac{5}{k+1} \cdot \frac{5}{k} \cdots \frac{5}{10} \cdot \frac{5^4}{24}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-8} \cdot \frac{5^4}{24}$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-13}.$$

Wegen $2^{10} \geq 1000$ ist dies bei $k \geq 24$ kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$. Daher ist $P_{24} = \sum_{n=0}^{24} \frac{x^n}{n!}$ ein Polynom, das die Exponentialfunktion wie gewünscht approximiert.

Aufgabe 7. Zeige, dass eine stetige Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gleichmäßig stetig ist.

Lösung

Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $\delta > 0$ ein Punktepaar $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| \leq \delta$ und $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$ gibt. Insbesondere gibt es somit für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Punktepaar $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge x_n eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge, deren Grenzwert, nennen wir ihn x, wegen der Abgeschlossenheit zum Intervall gehören muss. Die Glieder der Teilfolge besitzt die eingangs beschriebenen Eigenschaften, deshalb können wir direkt annehmen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit konvergieren dann nach Lemma 12.4 auch die beiden Bildfolgen $f(x_n)$ und $f(y_n)$ gegen $f(x)$. Es sei nun $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist für n hinreichend groß sowohl $|f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon'$ als auch $|f(y_n) - f(x)| \leq \epsilon'$. Dies ergibt mit der Dreiecksungleichung einen Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

Aufgabe 8. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x) = \pi^x + x^e.$$

Lösung

Es ist

$$f'(x) = \ln(\pi) \cdot \pi^x + e x^{e-1}.$$

Aufgabe 9. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Lösung

Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist überall differenzierbar und die Ableitung ist nur an der Stelle $x = 0$ gleich 0. Daher ist die Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ für $y \neq 0$ differenzierbar. Daher ist auch f als Hintereinanderschaltung von $x \mapsto x^2$ und dieser Funktion für $x \neq 0$ differenzierbar.

Für $x = 0$ betrachten wir direkt den Differenzenquotient, also für $h \neq 0$ den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}.$$

Wir betrachten positive h und können den Nenner als

$$h = \sqrt[3]{h^3} = \sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}$$

schreiben. Daher ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{h}}.$$

Für $h_n = \frac{1}{n}$ steht hier $\sqrt[3]{n}$ und dies divergiert, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht. Daher ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 10. Finde die Punkte (bzw. den Punkt) $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ derart, dass die Steigung der Sinusfunktion sin in a gleich der Gesamtsteigung von sin zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist.

Lösung

Die Gesamtsteigung ist

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Die Ableitung des Sinus ist der Kosinus, es geht also um die Lösungen der Gleichung

$$\cos a = \frac{2}{\pi}$$

mit $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Auf diesem Intervall ist die Kosinusfunktion streng fallend und somit gibt es wegen $\frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{2}$ genau eine Lösung, nämlich bei

$$a = \arccos\frac{2}{\pi}.$$

Aufgabe 11. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

Lösung

a) Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}\,.$$

Dies ist stets positiv, so dass die Funktion auf den beiden Teilintervallen $\mathbb{R}_-$ und $\mathbb{R}_+$ jeweils streng wachsend ist. Insgesamt ist die Funktion aber nicht wachsend, da die Werte zu negativem x stets größer als die Werte zu positivem x sind.

b) Für $x < 0$ ist $e^{-\frac{1}{x}} > 1$, da der Exponent positiv ist. Für $x > 0$ ist $e^{-\frac{1}{x}} < 1$, da der Exponent negativ ist. Daher haben insbesondere negative und positive reellen Zahlen unter f unterschiedliche Werte. Da im negativen Bereich als auch im positiven Bereich strenges Wachstum vorliegt, ist die Abbildung insgesamt injektiv.

c) Für negatives x durchläuft $-\frac{1}{x}$ sämtliche positiven Zahlen, so dass $e^{-\frac{1}{x}}$ das offene Intervall $]1, \infty[$ durchläuft. Für positives x durchläuft $-\frac{1}{x}$ sämtliche negativen Zahlen, so dass $e^{-\frac{1}{x}}$ das offene Intervall $]0, 1[$ durchläuft. Das Bild ist also $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

d) Aus $y = e^{-\frac{1}{x}}$ folgt durch Äquivalenzumformungen $\ln y = -\frac{1}{x}$ und damit $x = -\frac{1}{\ln y}$, die Umkehrabbildung ist also

$$\mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y \longmapsto -\frac{1}{\ln y}.$$

e)

Aufgabe 12. Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad n und $a \in \mathbb{R}$. Zeige unter Verwendung der Taylor-Formel, dass das Taylor-Polynom vom Grad n zu f im Entwicklungspunkt a mit f übereinstimmt.

Lösung

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es aufgrund der Taylor-Formel ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,,$$

wobei der linke Summand das Taylor-Polynom vom Grad n ist. Da f den Grad n besitzt, ist aber die $(n+1)$-te Ableitung davon 0. Daher fällt der rechte Summand weg und f stimmt mit dem n-ten Taylor-Polynom überein.

AUFGABE 13. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$s_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diejenige untere Treppenfunktion zu f zur äquidistanten Unterteilung in n gleichlange Intervalle, die auf dem Teilintervall

$$I_j = [a + \frac{(j-1)(b-a)}{n}, a + \frac{j(b-a)}{n}[, \ j = 1, \ldots, n\,,$$

(für $j = n$ sei das Intervall rechtsseitig abgeschlossen) das Infimum von $f(x)$, $x \in I_j$, annimmt. Zeige, dass die Folge der Treppenintegrale zu s_n gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

Lösung

Es sei $c = \int_a^b f(x)dx$. Es gibt eine Folge von unteren Treppenfunktionen u_n derart, dass die zugehörige Folge der Treppenintegrale gegen c konvergiert. Wir müssen zeigen, dass dies auch für die Treppenintegrale zu den s_n gilt. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der zuerst erwähnten Konvergenz gibt es zu $\frac{\epsilon}{2}$ ein k derart, dass für alle $n \geq k$ die Abschätzung

$$c - \int_a^b u_n(x)dx \,\leq\, \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Wir vergleichen die Treppenintegrale zu s_n mit dem Treppenintegral zu u_k. Es sei m die Anzahl der Unterteilungspunkte von u_k und es sei $d \in \mathbb{R}_+$ eine absolute Schranke für f. Insbesondere ist

$$u_k \,\leq\, d$$

und

$$s_n \,\geq\, -d.$$

Wir wählen n_0 so, dass

$$\frac{b-a}{n_0} md \,\leq\, \frac{\epsilon}{4}$$

ist. Sei $n \geq n_0$ fixiert. Von den n Teilintervallen gibt es maximal m Stück, in denen ein Unterteilungspunkt zu u_k liegt. Es sei $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Indexmenge dieser Teilintervalle. Auf einem Intervall I_j mit $j \notin J$ ist u_k konstant und es gilt dort

$$u_k \,\leq\, s_n \,\leq\, f$$

und entsprechend

$$\int_{I_j} u_k(x)dx \leq \int_{I_j} s_n(x)dx \leq \int_{I_j} f(x)dx.$$

Auf einem Intervall I_j mit $j \in J$ ist

$$\int_{I_j} u_k(x)dx \leq d\frac{b-a}{n}$$

und

$$\int_{I_j} s_n(x)dx \geq -d\frac{b-a}{n}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
c - \int_a^b s_n(x)dx &= c - \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} s_n(x)dx \\
&= c - \sum_{j \notin J} \int_{I_j} s_n(x)dx - \sum_{j \in J} \int_{I_j} s_n(x)dx \\
&\leq c - \sum_{j \notin J} \int_{I_j} u_k(x)dx - \sum_{j \in J} \int_{I_j} s_n(x)dx \\
&= c - \int_a^b u_k(x)dx + \sum_{j \in J} \int_{I_j} u_k(x)dx - \sum_{j \in J} \int_{I_j} s_n(x)dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + dm\frac{b-a}{n} + dm\frac{b-a}{n} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

AUFGABE 14. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{1}{\cos\, t}\, .$$

Lösung

Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\cos\, t}$$

berechnet sich unter Verwendung von Lemma 27.4 folgendermaßen.

$$\int \frac{1}{\cos\, t}\, dt = \int \frac{1+s^2}{1-s^2} \cdot \frac{2}{1+s^2}\, ds = \int \frac{2}{1-s^2}\, ds.$$

Eine Stammfunktion von $2\frac{1}{1-s^2}$ ist $\ln\, \frac{1+s}{1-s}$. Daher ist

$$\ln\left(\frac{1+\,\tan\,\frac{t}{2}}{1-\,\tan\,\frac{t}{2}}\right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cos\, t}$.

AUFGABE 15. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5\,.$$

Lösung

Die Stammfunktionen zu $f(t) \;=\; 3t^2 - 3t + 4$ sind

$$F(t) \;=\; t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 4t + c.$$

Die Bedingung

$$F(-1) \;=\; -5$$

führt auf

$$-1 - \frac{3}{2} - 4 + c \;=\; -5,$$

also

$$c \;=\; \frac{3}{2}.$$