Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

5. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	4	3	6	7	1	5	3	5	3	10	3	2	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *Umkehrabbildung* zu einer bijektiven Abbildung $F\colon L \to M$.
(2) Eine *Ordnungs*relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I.
(3) Die *bestimmte Divergenz* gegen $+\infty$ einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(4) Der *Polynomring* über einem Körper K (einschließlich der darauf definierten Operationen).
(5) Die *reelle Exponentialfunktion* zur Basis $b > 0$.
(6) Die *punktweise Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n\colon T \longrightarrow \mathbb{K},$$
wobei T eine Menge ist.
(7) Die *Obersumme* zu einer oberen Treppenfunktion t zu einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Die *Lösung* zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung
$$y' = f(t, y)\,,$$
wobei
$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$
eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(2) Die *Funktionalgleichung* der komplexen Exponentialfunktion.
(3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
(4) Die *Quotientenregel* für die Ableitung, also die Formel für die Ableitung von $\frac{f}{g}$ (mit den Voraussetzungen an f und g).

AUFGABE 3. (4 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

AUFGABE 4. (4 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung
$$3^n \geq n^4$$
gilt.

AUFGABE 5. (3 Punkte)

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 6. (6 Punkte)

Für ein Mathematikbuch soll der Graph der Exponentialfunktion über dem Intervall $[-5, 3]$ maßstabsgetreu in cm gezeichnet werden, wobei der Fehler maximal $0,001$ cm sein darf. Es steht nur ein Zeichenprogramm zur Verfügung, das lediglich Polynom zeichnen kann. Welches Polynom kann man nehmen?

AUFGABE 7. (7 Punkte)

Zeige, dass eine stetige Funktion

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gleichmäßig stetig ist.

AUFGABE 8. (1 Punkt)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x) = \pi^x + x^e.$$

AUFGABE 9. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

AUFGABE 10. (3 Punkte)

Finde die Punkte (bzw. den Punkt) $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ derart, dass die Steigung der Sinusfunktion sin in a gleich der Gesamtsteigung von sin zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist.

AUFGABE 11. (5 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

AUFGABE 12. (3 Punkte)
Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad n und $a \in \mathbb{R}$. Zeige unter Verwendung der Taylor-Formel, dass das Taylor-Polynom vom Grad n zu f im Entwicklungspunkt a mit f übereinstimmt.

AUFGABE 13. (10 Punkte)
Es sei

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei

$$s_n\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

diejenige untere Treppenfunktion zu f zur äquidistanten Unterteilung in n gleichlange Intervalle, die auf dem Teilintervall

$$I_j = [a + \frac{(j-1)(b-a)}{n}, a + \frac{j(b-a)}{n}[,\ j = 1, \ldots, n,$$

(für $j = n$ sei das Intervall rechtsseitig abgeschlossen) das Infimum von $f(x)$, $x \in I_j$, annimmt. Zeige, dass die Folge der Treppenintegrale zu s_n gegen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert.

AUFGABE 14. (3 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{1}{\cos t}.$$

AUFGABE 15. (2 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 3t + 4 \text{ mit } y(-1) = -5.$$