Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

4. Beispielklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	2	3	7	4	4	4	3	5	7	4	3	10	64
erhaltene Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *bijektive* Abbildung
$$f\colon M \longrightarrow N.$$
(2) Ein *Körper*.
(3) Eine *Teilfolge* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(4) Das *Maximum* der Funktion
$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$
wird im Punkt $x \in M$ *angenommen*.
(5) Die *Potenzreihe* in $z \in \mathbb{C}$ zu den Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$.
(6) Die n-fache *stetige Differenzierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$
auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(7) Eine *obere Treppenfunktion* zu einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.
(8) Eine *homogene lineare* gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Bernoulli-Ungleichung* für einen angeordneten Körper.
(2) Das *Majorantenkriterium* für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von komplexen Zahlen.
(3) Die *Division mit Rest* im Polynomring $K[X]$ über einem Körper K.
(4) Der Satz über *partielle Integration*.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gelte $x \leq \epsilon$. Zeige $x = 0$.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

AUFGABE 5. (7 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt.

AUFGABE 6. (4 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

AUFGABE 7. (4 (2+2) Punkte)

Es seien die beiden Polynome

$$P = X^2 + 3X - 5 \text{ und } Q = X^2 - 4X + 7$$

gegeben.

a) Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

b) Berechne die Ableitung von $P(Q)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

AUFGABE 8. (4 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a).$$

Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass

$$f(x) > g(x)$$

für alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$ gilt.

AUFGABE 9. (3 Punkte)

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

AUFGABE 10. (5 Punkte)

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 11. (7 (3+3+1) Punkte)

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin\frac{\pi}{4} \;=\; \cos\frac{\pi}{4} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin\frac{\pi}{3} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

die Extrema.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{5x+1}}dx\,.$$

Aufgabe 14. (10 Punkte)

Beweise, dass eine stetige Funktion

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Riemann-integrierbar ist.